

2010年医学部第3問

3 n は自然数とする. 1 以上の実数 a, d と正の実数 b, c を成分とする行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対し, n 個の積 A^n を

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad A^1 = A$$

とおく. また, $0 < v \leq u$ をみたす実数 u, v と正の実数 λ に対して, A は等式

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

をみたすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 不等式

$$\left(1 + \frac{v}{u}\right) \lambda^n \leq a_n + b_n + c_n + d_n \leq \left(1 + \frac{u}{v}\right) \lambda^n$$

を示せ.

(2) M を $1 + \frac{1}{b}$ と $1 + \frac{1}{c}$ の大きい方 ($b = c$ の場合はどちらでも良い) とするとき, 不等式

$$a_n + b_n + c_n + d_n < M(a_{n+1} + d_{n+1})$$

を示せ.

(3) 数列

$$\left\{ \frac{1}{n} \log(a_n + d_n) \right\}$$

の極限值を求めよ.