2011 年 政治経済学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ．

(1) a，b は整数で，2 次方程式

$$x^2+ax+b=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{A}$$

が異なる 2 つの実数解 α，β をもつとする．このとき，α，β はともに整数であるか，ともに無理数であるかのいずれかであることを証明する．以下の問に答え，証明を完成させよ．

まず，$b=0$ のときは，$x^2+ax=0$ であるから A は整数解 0，$-a$ をもつ．以下では $b\neq 0$ とする．

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$ であり，これらは整数である．有理数と無理数の和は有理数でなく，整数と整数以外の有理数の和は整数ではないという事実を用いると，α，β がともに整数以外の有理数であるとして矛盾を導けばよい．

そこで，α，β が 2 以上の整数 p_1，p_2 と 0 でない整数 q_1，q_2 を用いて，既約分数

$$\alpha=\frac{q_1}{p_1},\quad \beta=\frac{q_2}{p_2}$$

で表されると仮定する．ここに，$\dfrac{q_i}{p_i}$ $(i=1,\ 2)$ が既約分数であるとは，p_i と $|q_i|$ の最大公約数が 1 であることをいう．このとき，

$$\alpha+\beta=\frac{p_2q_1+p_1q_2}{p_1p_2} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\alpha\beta=\frac{q_1q_2}{p_1p_2} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

(i) ① において，$\alpha+\beta$ が整数であることを用いて，$p_1=p_2$ であることを示せ．

(ii) ② において，$\alpha\beta$ が整数であることと問 1 の結果から，既約分数の仮定に矛盾することを示せ．

(ii) の結果から，α，β はともに整数であるか，ともに無理数であることが示された．

(2) c が自然数のとき，$\sqrt{c}$ は自然数であるか無理数であることを証明せよ．