0002086903197999

和歌山大学

2015 年 第 1 問

1 nを 1 以上の整数とする．袋の中に，1 の数字を書いたカードが 1 枚，2 の数字を書いたカードが 2 枚，3 の数字を書いたカードが 3 枚入っている．この袋の中から，無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し，もとに戻すという試行を繰り返す．次の問いに答えよ．

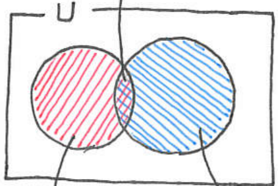
(1) この試行を n 回繰り返したとき，記録された n 個の数字すべての積を R_n とする．R_n が 3 で割り切れない確率と，R_n が 6 で割り切れる確率を n を用いて表せ．

(2) この試行を n 回繰り返したとき，記録された n 個の数字の合計を S_n とし，S_n が偶数である確率を p_n とする．p_{n+1} を p_n を用いて表し，数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 全部で 6 枚入っている.

R_n が 3 で割り切れない $\iff$ 3 のカードが 1 回も出ない

∴ R_n が 3 で割り切れない確率は. $\left(\frac{3}{6}\right)^n = \underline{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ //



同様に R_n が 2 で割り切れない $\iff$ 2 のカードが 1 回も出ない

∴ R_n が 2 で割り切れない確率は. $\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

また, R_n が 2 でも 3 でも割り切れない $\iff$ すべて 1 のカードが出る

∴ R_n が 2 でも 3 でも割り切れない確率は. $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

∴ 余事象より, R_n が 6 で割り切れる確率は.

$$1 - \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} = \underline{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n} \text{ //}$$

(2) S_{n+1} が偶数である $\iff$
- S_n が偶数であり, $n+1$ 回目に 2 のカードを引く
- S_n が奇数であり, $n+1$ 回目に 1 または 3 のカードを引く.

$$\therefore P_{n+1} = P_n \cdot \frac{2}{6} + (1-P_n)\cdot\frac{4}{6}$$

$$\therefore P_{n+1} = -\frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}$$

$$\therefore P_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

∴ 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{2}\right\}$ は 初項 $P_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列

$$\therefore P_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \underline{P_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}} \text{ //}$$