

2013年 第6問

6 座標平面上で原点 O を中心とする半径 1 の円の第 1 象限の部分をも C とする。曲線 $y = f(x)$ ($0 < x < 1$) は第 4 象限にあり、かつすべての x_1 ($0 < x_1 < 1$) について、点 $(x_1, f(x_1))$ における接線が C 上の点 (x_1, y_1) における C の接線と直交しているとする。曲線 $y = f(x)$ 上の動点を P とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f'(x)$ を求めよ。
- (2) 点 P における $y = f(x)$ の接線と y 軸との交点を Q とするとき、線分 PQ の長さは常に 1 であることを示せ。
- (3) x 軸上と y 軸上に 2 辺をもち、線分 OP を対角線とする長方形の面積を S とする。点 P が S を最大にする位置にあるとき、 P は P における曲線の接線と座標軸が交わってできる 2 点の midpoint であることを示せ。
- (4) $f(x)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$ であるとする。