0001980279108999

九州大学

2015 年 文系 第 1 問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上の 2 つの放物線

C_1 : $y = x^2$

C_2 : $y = -x^2 + ax + b$

を考える．ただし，a，b は実数とする．

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a，b に関する条件を求めよ．

以下，a，b が (1) の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする．

(2) b を a を用いて表せ．

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ．

(1) C_1 と C_2 が異なる2点で交わる $\Leftrightarrow$ 方程式 $x^2-(-x^2+ax+b)=0$ が異なる2つの実数解をもつ．

$\Leftrightarrow$ 判別式 $D>0$

$\therefore$ $2x^2-ax-b=0$ の判別式を D とおくと，

$D = a^2+4\cdot2\cdot b>0$　　$\therefore$ $\underline{a^2+8b>0}$ //

(2) $2x^2-ax-b=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，

$$9 = \int_\alpha^\beta -x^2+ax+b-x^2\,dx$$

$$= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$\therefore$ $(\beta-\alpha)^3=27$ で $\beta>\alpha$ より　$\beta-\alpha=3$

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=\dfrac{a}{2}$，$\alpha\beta=-\dfrac{b}{2}$

$\therefore (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$= \frac{a^2}{4}+2b$$

$\therefore$ $9=\dfrac{a^2}{4}+2b$

$\therefore$ $\underline{b=-\dfrac{a^2}{8}+\dfrac{9}{2}}$ //

0001980279108999

九州大学

2015 年 文系 第 1 問

2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上の 2 つの放物線

$C_1 \ : \ y = x^2$

$C_2 \ : \ y = -x^2 + ax + b$

を考える．ただし，a，b は実数とする．

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a，b に関する条件を求めよ．

以下，a，b が (1) の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする．

(2) b を a を用いて表せ．

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ．

(3) C_2 の頂点は．

$y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b$ より．$\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} + b\right)$

ここで (2) の結果より．頂点は $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{8} + \frac{9}{2}\right)$

これを (X, Y) とおくと．$Y = \frac{1}{2}X^2 + \frac{9}{2}$ となる

また．(1) の条件 $a^2 + 8b > 0$ より．b を消去すると．$36 > 0$ これは常に成り立つ

以上より．求める軌跡は 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$