



2016年理系第5問

5  $k$  を正の整数とし、10進法で表された小数点以下  $k$  桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を1つとる。ここで、 $a_1, a_2, \dots, a_k$  は0から9までの整数で、 $a_k \neq 0$  とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数  $n$  をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2)  $p$  が  $5 \cdot 10^{k-1}$  以上の整数ならば、次の不等式をみたす正の整数  $m$  が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数  $x$  に対し、 $r \leq x < r+1$  をみたす整数  $r$  を  $[x]$  で表す。 $\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k$  をみたす正の整数  $s$  は存在しないことを示せ。