徳島大学

2014 年 第 1 問

$\boxed{1}$ $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$とし，行列 A で表される 1 次変換を f とする．f によって点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ が点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ に移されるとする．さらに，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ が f によって点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$ に移されるとする．

(1) すべての自然数 n について，点 P_n は直線 $x+y=1$ 上にあることを証明せよ．

(2) x_{n+1} を x_n の式で表せ．さらに，数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) n を限りなく大きくするとき，点 P_n が近づいていく点の座標を求めよ．

(1) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ∴ 点 P_1 は $x+y=1$ 上にある．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する．

このとき．$x_k+y_k=1$ …①

また．$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_k+\frac{1}{2}y_k \\ \frac{1}{4}x_k+\frac{1}{2}y_k \end{pmatrix}$

①より．

∴ $x_{k+1}+y_{k+1}=\frac{3}{4}x_k+\frac{1}{2}y_k+\frac{1}{4}x_k+\frac{1}{2}y_k=x_k+y_k=1$

∴ 点 P_{k+1} も $x+y=1$ 上にある．(i), (ii) より．点 $\mathrm{P}_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ は $x+y=1$ 上にある ▨

(2) (1) より．$x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{2}y_n$，$x_n+y_n=1$ より

$x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{2}(1-x_n)$ ∴ $\underline{x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{2}}$ //

$x_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(x_n-\frac{2}{3}\right)$

∴ $\{x_n-\frac{2}{3}\}$ は 初項 $-\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列 ∴ $\underline{x_n=-\frac{1}{6\cdot4^{n-1}}+\frac{2}{3}}$ //

(3) (2) より $(x_n,\ y_n)=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6\cdot4^{n-1}},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6\cdot4^{n-1}}\right)$

∴ $n\to\infty$ のとき．$\underline{\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)\ \text{に近づく}}$ //