



2015年医学部第4問

1枚目/2枚

4 数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  を

$$a_1 = 119, \quad a_{n+1} - a_n = 12n - 61 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = -\frac{1}{2}n(n-2c+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。ここで  $c$  は  $5 < c < 6$  を満たす定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 一般項  $a_n, b_n$  を求めよ。  
 (2)  $a_n b_n > 0$  となる  $n$  をすべて求めよ。  
 (3)  $\sum_{k=1}^n a_k b_k$  が最大になる  $n$  を求めよ。

(1) 階差数列の公式より、 $n \geq 2$  に対して

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (12k - 61)$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 119 + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot n(n-1) - 61(n-1) \\ &= 6n^2 - 67n + 180 \end{aligned}$$

これは  $n=1$  のときも成り立つ  $\therefore \underline{a_n = 6n^2 - 67n + 180}$  //

$$n \geq 2 \text{ のとき, } \frac{1}{b_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{b_n} &= -\frac{1}{2}n(n-2c+1) - \left\{ -\frac{1}{2}(n-1)(n-2c) \right\} \\ &= c - n \end{aligned}$$

$$\frac{1}{b_1} = -\frac{1}{2}(2-2c) = c-n \text{ なので, } n=1 \text{ のときも成り立つ}$$

$$\therefore \underline{b_n = \frac{1}{c-n}}$$
 //

(2) (1) より、 $a_n = (2n-9)(3n-20) \therefore a_n < 0$  となるのは、 $\frac{9}{2} < n < \frac{20}{3} \therefore n = 5, 6$

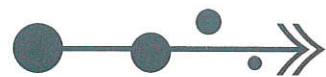
$b_n < 0$  となるのは、(2) より、 $c-n < 0 \therefore n > c$  ここで  $5 < c < 6$  より、 $n = 6, 7, 8, \dots$

$\therefore a_n < 0$  かつ  $b_n < 0$  となるのは、 $n = 6$

同様に、 $a_n > 0$  かつ  $b_n > 0$  となるのは、 $n = 1, 2, 3, 4$

以上より、 $\underline{n = 1, 2, 3, 4, 6}$  //

2枚目につづく



2015年医学部第4問

2枚目/2枚

4 数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  を

$$a_1 = 119, \quad a_{n+1} - a_n = 12n - 61 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = -\frac{1}{2}n(n-2c+1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。ここで  $c$  は  $5 < c < 6$  を満たす定数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 一般項  $a_n, b_n$  を求めよ。  
 (2)  $a_n b_n > 0$  となる  $n$  をすべて求めよ。  
 (3)  $\sum_{k=1}^n a_k b_k$  が最大になる  $n$  を求めよ。

$$(3) \sum_{k=1}^n a_k b_k \text{ が最大} \Rightarrow \underline{a_n b_n > 0}$$

$a_n b_n < 0$  となるときは、これを足さない方が大きい

また、(2) の議論より、すべての自然数  $n$  について、 $a_n b_n \neq 0$  となる

$$\therefore \text{最大値の候補は } \sum_{k=1}^4 a_k b_k \text{ と } \sum_{k=1}^6 a_k b_k \quad (\because (2) \text{ より})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 a_k b_k - \sum_{k=1}^4 a_k b_k &= a_5 b_5 + a_6 b_6 \\ &= \frac{-5}{c-5} + \frac{-6}{c-6} \\ &= \frac{11c-60}{(c-5)(6-c)} \end{aligned}$$

$$(\text{分母}) > 0 \text{ より, } \begin{cases} 5 < c < \frac{60}{11} \text{ のとき } \sum_{k=1}^6 a_k b_k < \sum_{k=1}^4 a_k b_k \\ c = \frac{60}{11} \text{ のとき } \sum_{k=1}^6 a_k b_k = \sum_{k=1}^4 a_k b_k \\ \frac{60}{11} < c < 6 \text{ のとき } \sum_{k=1}^6 a_k b_k > \sum_{k=1}^4 a_k b_k \end{cases}$$

$$\text{よって, } \begin{cases} 5 < c < \frac{60}{11} \text{ のとき, } n=4 \\ c = \frac{60}{11} \text{ のとき, } n=4, 6 \\ \frac{60}{11} < c < 6 \text{ のとき, } n=6 \end{cases} \text{ —— } "$$