

2013年 商学部 第2問

2 三角関数の加法定理を用いると

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1, \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \quad \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

を導くことができる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 加法定理と上の公式を利用して、 $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ を導け。
- (2)  $x = \cos \frac{2\pi}{5}$ とおくと、(1)より  $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$ となる。この左辺を因数分解すると  $(x-1)(ax^2 + bx + c)^2$ となる。整数  $a, b, c$ を求めよ。ただし、 $a > 0$ とする。
- (3)  $\cos \frac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

$$(1) \cos(2\theta + 3\theta) = \cos 2\theta \cos 3\theta - \sin 2\theta \sin 3\theta \quad (\text{加法定理})$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos 5\theta &= (2\cos^2\theta - 1)(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 2\sin\theta\cos\theta(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) \\ &= 8\cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 3\cos\theta - 6(1 - \cos^2\theta)\cos\theta + 8(1 - \cos^2\theta)^2\cos\theta \\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \quad \square \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{array}{r} 16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 \\ x-1 \overline{) 16x^5 - 20x^3 + 5x - 1} \\ \underline{16x^5 - 16x^4} \phantom{+ 5x - 1} \\ 16x^4 - 20x^3 \phantom{+ 5x - 1} \\ \underline{16x^4 - 16x^3} \phantom{+ 5x - 1} \\ -4x^3 + 5x \phantom{- 1} \\ \underline{-4x^3 + 4x^2} \phantom{- 1} \\ -4x^2 + 5x \phantom{- 1} \\ \underline{-4x^2 + 4x} \phantom{- 1} \\ x - 1 \phantom{- 1} \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore 16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = (x-1)(4x^2 + 2x - 1)^2$$

$$\therefore a = 4, b = 2, c = -1$$

(3) (2) の方程式が成り立つのは、 $x = 1$  または、 $4x^2 + 2x - 1 = 0$  であり。

$$x = \cos \frac{2\pi}{5} \neq 1 \text{ より, } x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 4}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$x = \cos \frac{2\pi}{5} > 0 \text{ より } \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$