0002196183087999

新潟大学

2016年 理系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ a を $0<a<1$ を満たす実数として x の関数 $f(x)=ax-\log(1+e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし必要があれば

$$\lim_{x\to+0} x\log x = 0$$

が成り立つことを用いてよい．

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ．

(2) a の関数 $y=M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(3) a の関数 $y=M(a)$ のグラフをかけ．

(1) $f'(x) = a - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{a+(a-1)e^x}{1+e^x}$

$\therefore f'(x)=0 \iff a+(a-1)e^x=0$

$\iff e^x = \dfrac{a}{1-a}$

$\iff x = \log\dfrac{a}{1-a}$

x	$\cdots$	$\log\frac{a}{1-a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore$ 右の増減表より，$M(a) = f\left(\log\dfrac{a}{1-a}\right) = a\log\dfrac{a}{1-a} - \log\left(1+\dfrac{a}{1-a}\right)$

$= a\log a - a\log(1-a) + \log(1-a)$

$= \underline{a\log a + (1-a)\log(1-a)}$ //

(2) $M'(a) = \log a + 1 - \log(1-a) - 1$

$= \log\dfrac{a}{1-a}$

$\therefore M'(a)=0 \iff \dfrac{a}{1-a}=1$

$\iff a=\dfrac{1}{2}$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$M'(a)$		$-$	0	$+$	
$M(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\therefore$ 右の増減表より，最小値 $M\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{-\log 2 \ \left(a=\frac{1}{2}\text{のとき}\right)}$ //

(3) $\displaystyle\lim_{a\to+0} M(a) = 0$

$\displaystyle\lim_{a\to 1-0} M(a) = 0$

より，右のようになる．

＊ $M(a)=M(1-a)$ なので

グラフは $a=\frac{1}{2}$ に関して対称

であると分かる．

＊ $\displaystyle\lim_{a\to+0} M'(a) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{a\to 1-0} M'(a) = \infty$

に注意してグラフをかくこと．