0002269810377999

長崎大学

2016年 医学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 半径1の円に内接する正十二角形 D がある．その面積を S とする．D の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_1 をつくる．さらに，D_1 の各辺の中点を結んで正十二角形 D_2 をつくる．このように，D_{n-1} の各辺の中点を順に結んで正十二角形 D_n をつくる（$n \geqq 2$）．D_n の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

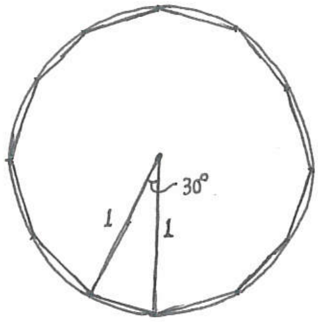
(1) S と S_1 を求めよ．

(2) S_n を n の式で表せ（$n \geqq 1$）．

(3) $S_n \leqq \dfrac{1}{2}S$ となる最小の整数 n を求めよ．ただし，

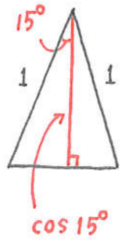
$$1.89 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 1.9$$

である．



(1) $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ \times 12 = \underline{3}$ //

D と D_1 の相似比は，$1 : \cos 15^\circ$



$\therefore\ S : S_1 = 1^2 : \cos^2 15^\circ$

$\therefore\ S_1 = S \cdot \cos^2 15^\circ$

$= 3 \cdot \dfrac{1+\cos 30^\circ}{2}$

$= \underline{\dfrac{3(2+\sqrt{3})}{4}}$ //

(2) $S_n = \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \cdot S = \underline{3\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n}$ //

(3) $S_n \leqq \frac{1}{2}S \iff 3\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \dfrac{3}{2}$

$\iff \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n \leqq \dfrac{1}{2}$

$\iff n\left\{\log_2(2+\sqrt{3}) - 2\right\} \leqq -1$

$\iff n \geqq \dfrac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})}$

ここで，$\underset{\substack{\fallingdotseq \\ 9.09}}{\dfrac{1}{2-1.89}} < \dfrac{1}{2-\log_2(2+\sqrt{3})} < \underset{\substack{\| \\ 10}}{\dfrac{1}{2-1.9}}$

$\therefore\ \underline{n = 10}$ //