2015年 教育文化（理系）第3問

3 四面体OABCの3辺OA，AB，BC上に，それぞれ点P，Q，Rがある．OP = PA，AQ = 2QBとし，点Rは点Bとは異なるものとする．△PQRの重心をHとするとき，次の各問に答えよ．ただし，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$，$\vec{c} = \overrightarrow{OC}$とする．

(1) $\overrightarrow{OH}$を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}$を用いて表せ．

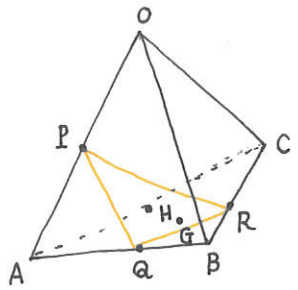
(2) △ABCの重心をGとする．3点O，G，Hが同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{OR}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ より，

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \overrightarrow{OR}\right)$$

$$= \underline{\frac{5}{18}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OR}} \ //$$



(2) BR : RC = s : 1−s （0 < s ≦ 1）とおくと，

$$\overrightarrow{OR} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c}$$

(1)の結果に代入して，$\overrightarrow{OH} = \frac{5}{18}\vec{a} + \left(\frac{5}{9} - \frac{s}{3}\right)\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c}$ …①

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ …②

3点O，G，Hが同一直線上にあるので，

$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OG}$ となる実数kが存在する．$\vec{a} \nparallel \vec{b}$，$\vec{b} \nparallel \vec{c}$，$\vec{a} \nparallel \vec{c}$ より，

②と③を$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OG}$に代入して係数を比較すると，

$$\begin{cases} \frac{5}{18} = \frac{k}{3} \\ \frac{5}{9} - \frac{s}{3} = \frac{k}{3} \\ \frac{s}{3} = \frac{k}{3} \end{cases}$$

これを解くと，$s = k = \frac{5}{6}$

$$\therefore \underline{\overrightarrow{OR} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{c}} \ //$$