徳島大学

2015年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が次を満たす.

$$S_n = \frac{1}{3}(2a_n + 8a_{n-1}) \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(1) $n \geqq 3$ のとき, a_n を a_{n-1} と a_{n-2} の式で表せ.

(2) $n \geqq 3$ のとき, $a_n - 2a_{n-1}$ を a_1 と a_2 の式で表せ.

(3) $a_1 = 1$ とする. 一般項 a_n を求めよ.

(1) $S_n = \frac{1}{3}(2a_n + 8a_{n-1}) \quad (n=2, 3, 4, \cdots) \quad \cdots ①$

$S_{n-1} = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + 8a_{n-2}) \quad (n=3, 4, 5, \cdots) \quad \cdots ②$

① − ② より. $a_n = \frac{1}{3}(2a_n + 6a_{n-1} - 8a_{n-2}) \quad (n=3, 4, 5, \cdots)$

∴ $n \geqq 3$ のとき. $\underline{a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}}$ //

(2) $n \geqq 3$ のとき (1) より.

$a_n - 2a_{n-1} = 4(a_{n-1} - 2a_{n-2})$

∴ 数列 $\{a_n - 2a_{n-1}\}$ は公比 4 の等比数列であり.

$a_n - 2a_{n-1} = 4(a_{n-1} - 2a_{n-2}) = 4^2(a_{n-2} - 2a_{n-3}) = \cdots = 4^{n-2}(a_2 - 2a_1)$

∴ $\underline{a_n - 2a_{n-1} = 4^{n-2}(a_2 - 2a_1)}$ // $(n \geqq 3)$

(3) $a_1 = 1$ のとき. (1) の ① に $n = 2$ を代入して.

$a_1 + a_2 = \frac{1}{3}(2a_2 + 8a_1) \quad ∴ a_2 = 5$

∴ (2) より. $a_n - 2a_{n-1} = 3 \cdot 4^{n-2} \quad (n \geqq 3) \quad \cdots ③$

同様に, (1) より. $a_n - 4a_{n-1} = 2(a_{n-1} - 4a_{n-2}) = 2^2(a_{n-2} - 4a_{n-3}) = \cdots = 2^{n-2}(a_2 - 4a_1)$

∴ $a_n - 4a_{n-1} = 2^{n-2} \quad (n \geqq 3) \quad \cdots ④$

③ × 2 − ④ より. $a_n = 6 \cdot 4^{n-2} - 2^{n-2}$

∴ $\underline{a_n = 3 \cdot 2^{2n-3} - 2^{n-2}}$ // これは $n = 1, 2$ も成り立つ.