

2016年 教育学部 (中等数学) 第3問

3 2つの数列 $\{\theta_n\}$, $\{a_n\}$ を漸化式

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_{n+1} = \frac{\pi - \theta_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{|2 - a_n|} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義するとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{\theta_n\}$ の一般項を求めよ。また $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (2) $\cos \theta_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_n}{2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (3) $2 \cos \theta_n = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ。