



2016年理学部(数)第3問

3 次の各問に答えよ.

- (1) $x > 1$ のとき $\log x < 2\sqrt{x} - 2$ を示し, これを用いて $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ. ただし, \log は自然対数を表す.
- (2) 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) の増減, 凹凸を調べ, そのグラフの概形をかけ.
- (3) 定積分 I_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を以下で定義する.

$$I_n = \int_1^e \frac{(\log x)^{n-1}}{x^2} dx$$

ただし, e は自然対数の底である. このとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + nI_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (*)$$

- (4) 等式(*)を用いて, 関数 $y = \frac{\log x}{x}$ のグラフと x 軸および直線 $x = e$ で囲まれた図形を, x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ.