

2016年工学部第2問

2 $s > 0, t > 0$ とする. 正の数からなる2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は初項と第2項が $a_1 = b_1 = s, a_2 = b_2 = t$ であり, すべての自然数 n に対して

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1}b_n}$$

をみたすとする. 次に答えよ.

- (1) a_3, b_3, a_4, b_4 を s, t を用いて表せ.
- (2) 自然数 n に対して, $c_n = a_{n+1} - a_n$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを示し, 一般項を求めよ. さらに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) 自然数 n に対して, $d_n = \log b_n$ とおく. 数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ. さらに, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を s の累乗と t の累乗を用いて表せ. ただし, 対数は自然対数とする.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.
- (5) $t = s$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ であるための必要十分条件であることを示せ.