# 九州大学

2016年 理系 第4問



$\boxed{4}$ 自然数 $n$ に対して，$10^n$ を 13 で割った余りを $a_n$ とおく．$a_n$ は 0 から 12 までの整数である．以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+1}$ は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ．

(2) $a_1$，$a_2$，…，$a_6$ を求めよ．

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 $N$ をすべて求めよ．

（i）$N$ を十進法で表示したとき 6 桁となる．

（ii）$N$ を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる．

（iii）$N$ は 13 で割り切れる．

(1) $10^n = 13m + a_n$ （$m$は0以上の整数）と表せる.

$10^{n+1} = 10\cdot 10^n$ より,

$10^{n+1} = 10(13m + a_n)$

$= 13\cdot(10m) + 10a_n$

$\therefore$ $10^{n+1}$を13で割った余り$a_{n+1}$は$10a_n$を13で割った余りに等しい ▨

(2) $\underline{a_1 = 10}$ 〃 以下(1)をくり返し使うと,

$a_2 \equiv 100 \pmod{13}$ $\therefore \underline{a_2 = 9}$ 〃

$a_3 \equiv 90 \pmod{13}$ $\therefore \underline{a_3 = 12}$ 〃

$a_4 \equiv 120 \pmod{13}$ $\therefore \underline{a_4 = 3}$ 〃

$a_5 \equiv 30 \pmod{13}$ $\therefore \underline{a_5 = 4}$ 〃

$a_6 \equiv 40 \pmod{13}$ $\therefore \underline{a_6 = 1}$ 〃

(3) (i),(ii)より. $N = a2016b_{(10)}$ と表せる （$a, b$は整数で $1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$）

このとき,

$N \equiv a\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 1\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + b \pmod{13}$

$\equiv a\cdot a_5 + 2\cdot a_4 + a_2 + 6\cdot a_1 + b \pmod{13}$

$\equiv 4a + b + 75 \pmod{13}$

$\equiv 4a + b + 10 \pmod{13}$

$\therefore$ Nが13で割り切れるのは. $(a,b) = (2,8), (3,4), (4,0), (5,9), (6,5), (7,1), (9,6)$

$\therefore \underline{N = 220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166}$ 〃