



2012年理系第4問

4  $p$ と $q$ はともに整数であるとする. 2次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 $\alpha, \beta$ を持ち, 条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) \neq 0$ をみたしているとする. このとき, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義する. 以下の問いに答えよ.

(1)  $a_1, a_2, a_3$  は整数であることを示せ.

(2)  $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) > 0$  のとき, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  は整数であることを示せ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  となるとき,  $p$ と $q$ の値をすべて求めよ. ただし,  $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい.