0002255544477999

熊本大学

2016年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする．ただし，i は虚数単位である．$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ．

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 500$ となる最小の n を求めよ．

(3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ．

和積の公式

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(1) $\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore z_n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) - 2\cdot 2^{n-1}\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{3} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right)$ ← ド・モアブルの定理を使った．

$= 2^n\left\{\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{(n-1)\pi}{3}\right) + i\left(\sin\frac{n\pi}{3} - \sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right)\right\}$

∴ 和積の公式より，

$z_n = 2^n\left\{-2\sin\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6} + i\left(2\cos\frac{2n-1}{6}\pi\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$= 2^n\left(-\sin\frac{2n-1}{6}\pi + i\cos\frac{2n-1}{6}\pi\right)$

$= \underline{2^n\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi + i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)}$ //

(2) (1)より，$|z_k| = 2^k$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k| > 500 \iff \frac{2(1-2^n)}{1-2} > 500$

$\iff 2^n - 1 > 250$

∴ 最小の n は，$\underline{n = 8}$ //

(3) (1)と同様にして，

$z_n = 2^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) - 2\cdot 2^{n-1}\{\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta\}$

$= 2^n\left\{-2\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + i\cdot 2\cos\frac{2n-1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right\}$

$n = 1000$ を代入して，

$\therefore z_{1000} = 2^{1001}\left(-\sin\frac{1999}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{1999}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)$

z_{1000}：実数 $\iff \frac{1999}{2}\theta = \frac{2m-1}{2}\pi$ (m：自然数)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より，$m = 1, 2, \cdots, 500$　　∴ $\underline{500個}$ //