2015年 経済学部 第3問

$\boxed{3}$ 実数θは$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$を満たすとする．O(0，0，0) を原点とする座標空間の3点

$$\mathrm{A}(\cos^2\theta,\ \sin\theta,\ 1+\sin^2\theta),\quad \mathrm{B}(\sin\theta,\ 0,\ -\sin\theta),\quad \mathrm{C}(1,\ \cos 2\theta - \cos^2\theta,\ 1)$$

に対し，それぞれ$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく．

(1) $\vec{b}$は零ベクトルではないとする．4点O，A，B，Cが同一平面上にあるならば，

$$\theta = \frac{\boxed{27}\,\boxed{28}}{\boxed{29}}\pi$$ である．

次に$\theta = \frac{\pi}{6}$とし，以下このときの3点A，B，Cを考える．また，3点O，B，Cの定める平面をαとする．

(2) 点Pはα上の点で，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$が最小になるものとする．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{b} = \boxed{30},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{c} = \boxed{31}$$

が成り立つ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\boxed{32}\,\boxed{33}}{\boxed{34}}\vec{b} + \frac{\boxed{35}\,\boxed{36}}{\boxed{37}\,\boxed{38}}\vec{c}$$

となる．ただし，$\vec{u}$，$\vec{v}$はベクトル$\vec{u}$と$\vec{v}$の内積を表す．

(3) 三角形OBCの面積は$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\boxed{39}\,\boxed{40}}{\boxed{41}}}$であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{\frac{\boxed{42}}{\boxed{43}\,\boxed{44}}}$なので，四面体OABCの体積は$\frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$となる．