

2016年 理工学部 第4問

4  $i$  を虚数単位とする。次の事実がある。

事実 F

$a, b$  を互いに素な正の整数とする。このとき、

$$\left( \cos \frac{2a}{b} \pi + i \sin \frac{2a}{b} \pi \right)^k = \cos \frac{2}{b} \pi + i \sin \frac{2}{b} \pi$$

となる整数  $k$  が存在する。

(1) 等式

$$\left( \cos \frac{4}{5} \pi + i \sin \frac{4}{5} \pi \right)^k = \cos \frac{2}{5} \pi + i \sin \frac{2}{5} \pi$$

を満たす最小の正の整数  $k$  は  である。

(2)  $a, b$  を互いに素な正の整数とし、集合  $P$  を

$$P = \left\{ z \mid z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left( \cos \frac{2a}{b} \pi + i \sin \frac{2a}{b} \pi \right)^k \text{ と表される複素数} \right\}$$

で定める。事実 F を考慮すると、集合  $P$  の要素の個数  $n(P)$  は  である。

(3) 事実 F を証明しなさい。

(4)  $a_1, b_1$  を互いに素な正の整数とし、 $a_2, b_2$  も互いに素な正の整数とする。集合  $Q_1$  と  $Q_2$  を

$$Q_1 = \left\{ z \mid z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left( \cos \frac{2a_1}{b_1} \pi + i \sin \frac{2a_1}{b_1} \pi \right)^k \text{ と表される複素数} \right\}$$

$$Q_2 = \left\{ z \mid z \text{ は整数 } k \text{ を用いて } \left( \cos \frac{2a_2}{b_2} \pi + i \sin \frac{2a_2}{b_2} \pi \right)^k \text{ と表される複素数} \right\}$$

で定め、集合  $R$  を

$$R = \{ z \mid z \text{ は集合 } Q_1 \text{ の要素と集合 } Q_2 \text{ の要素の積で表される複素数} \}$$

で定める。 $b_1$  と  $b_2$  が互いに素ならば、集合  $R$  の要素の個数  $n(R)$  は  である。 $b_1$  と  $b_2$  が互いに素でないとき、それらの最大公約数を  $d$  とすれば、集合  $R$  の要素の個数  $n(R)$  は  である。