



2013年理系第2問

数理  
石井K

2  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  に対して、関数  $f(\theta)$  を

$$f(\theta) = \frac{2}{3} \sin 3\theta - \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$$

とおく.  $t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$  とするとき、次の問いに答えよ.

(1)  $t$  のとりうる値の範囲を求めよ.

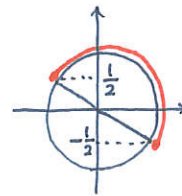
(2)  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$  を示せ. また,  $\frac{t^3 - 3t}{2} = \sin 3\theta$  が成り立つことを示せ.

(3)  $f(\theta)$  を  $t$  の式で表せ. また, それを利用して  $f(\theta)$  の最大値と最小値, および最大値, 最小値を与える  $\theta$  の値を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \quad t &= 2 \left( \sin \theta \cdot \frac{1}{2} + \cos \theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より, } -\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6} \pi$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \text{ より, } \underline{\underline{-1 \leq t \leq 2}}$$



$$\begin{aligned} (2) \quad \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } \frac{t^3 - 3t}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)^3 - 3(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin^3 \theta + 3\sqrt{3} \sin^2 \theta \cos \theta + 9 \sin \theta \cos^2 \theta + 3\sqrt{3} \cos^3 \theta - 3 \sin \theta - 3\sqrt{3} \cos \theta \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin^3 \theta + 3\sqrt{3} \sin^2 \theta \cos \theta + 9 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + 3\sqrt{3} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) - 3 \sin \theta - 3\sqrt{3} \cos \theta \right\} \\ &= -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \\ &= \sin 3\theta \quad \square \end{aligned}$$

$$(3) \quad f(\theta) \text{ を } t \text{ で表したものを } g(t) \text{ とおくと, (1), (2) より, } g(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3 - 3t}{2} - t = \frac{1}{3} t^3 - 2t$$

$$\therefore g'(t) = (t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2}) \quad -1 \leq t \leq 2 \text{ の範囲で } g'(t) = 0 \text{ とするのは } t = \sqrt{2}$$

$\therefore$  右の増減表より 最大値は  $\frac{5}{3}$  ( $t = -1$  すなわち  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  のとき)

最小値は  $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$  ( $t = \sqrt{2}$  すなわち  $\theta = -\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$  のとき) //

$t$	-1	...	$\sqrt{2}$	...	2
$g(t)$		-	0	+	
$g(t)$	$\frac{5}{3}$		$\downarrow$		$\uparrow$

$-\frac{4}{3}\sqrt{2}$   $-\frac{4}{3}$