金沢大学

2016年 理系 第1問

1枚目/2枚

数理 石井K

1 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a_n - \dfrac{\sqrt{6}}{4}b_n, \quad b_{n+1} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a_n + \dfrac{\sqrt{2}}{4}b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

を満たすものとする．a_n を実部とし b_n を虚部とする複素数を z_n で表すとき，次の問いに答えよ．

(1) $z_{n+1} = wz_n$ を満たす複素数 w と，その絶対値 $|w|$ を求めよ．

(2) 複素数平面上で，点 z_{n+1} は点 z_n をどのように移動した点であるかを答えよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 複素数平面上の3点 0，z_n，z_{n+1} を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形を T_n とする．このとき，複素数平面上で T_1，T_2，$\cdots$，T_n，$\cdots$ によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ．

(1) $z_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \cdot i$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}a_n - \frac{\sqrt{6}}{4}b_n + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a_n + \frac{\sqrt{2}}{4}b_n\right)i$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}i)a_n + \frac{\sqrt{2}}{4}(-\sqrt{3}+i)b_n$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}i)\left(a_n + \frac{-\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}i}b_n\right)$$

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(-\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{3i+i}{1+3} = i$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4} \cdot (a_n + b_n i)$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4} z_n$$

$\therefore\ \underline{w = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{4}}$ //

$|w| = \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| \cdot \left|\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right| = \underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ //

(2) (1)より，$z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)z_n$

$\therefore$ <u>点 z_{n+1} は点 z_n を原点を中心として反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転して，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点</u> //

(3) $z_{n+1} = wz_n$ より，数列 $\{z_n\}$ は初項 $2+2i$，公比 w の等比数列となる．

$\therefore\ z_n = w^{n-1} \cdot z_1$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n-1} \cdot (2+2i)$$

ド・モアブル

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\} \cdot (2+2i)$$

つづく

2016年 理系 第1問　　2枚目/2枚

数理 石井K

1 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}a_n - \frac{\sqrt{6}}{4}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{\sqrt{6}}{4}a_n + \frac{\sqrt{2}}{4}b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

を満たすものとする．a_n を実部とし b_n を虚部とする複素数を z_n で表すとき，次の問いに答えよ．

(1) $z_{n+1} = wz_n$ を満たす複素数 w と，その絶対値 $|w|$ を求めよ．

(2) 複素数平面上で，点 z_{n+1} は点 z_n をどのように移動した点であるかを答えよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 複素数平面上の3点 0，z_n，z_{n+1} を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形を T_n とする．このとき，複素数平面上で T_1，T_2，$\cdots$，T_n，$\cdots$ によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ．

(3) のつづき

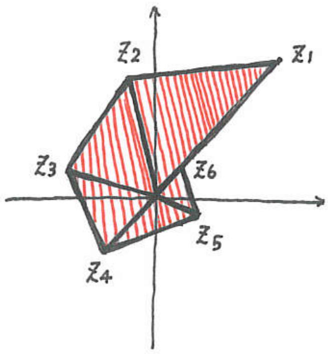
$$z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left\{\cos\frac{(n-1)\pi}{3} + i\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\right\} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left\{\cos\left(\frac{n-1}{3} + \frac{1}{4}\right)\pi + i\sin\left(\frac{n-1}{3} + \frac{1}{4}\right)\pi\right\}$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(\cos\frac{4n-1}{12}\pi + i\sin\frac{4n-1}{12}\pi\right)$$

$$\therefore\ a_n = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\frac{4n-1}{12}\pi,\quad b_n = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sin\frac{4n-1}{12}\pi \quad //$$

(4) (2) より，各 T_n は右図のようになり，



$n \geqq 6$ のとき，T_n は $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5$ に含まれ，$T_i \cap T_j = \phi\ (1 \leqq i < j \leqq 5)$ であるから

$T_1, T_2, \cdots T_5$ は互いに重ならない（線分は共有するが）

よって，面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}|z_1||z_2|\sin 60^\circ + \frac{1}{2}|z_2||z_3|\sin 60^\circ + \frac{1}{2}|z_3||z_4|\sin 60^\circ + \frac{1}{2}|z_4||z_5|\sin 60^\circ + \frac{1}{2}|z_5||z_6|\sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{2}\cdot 2 + 2\cdot\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

← 等比数列の和として計算すると少し速い？

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$$

$$= \frac{63\sqrt{6}}{32} \quad //$$