鹿児島大学

2016年 教育学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める．また α を $\alpha=1+\dfrac{1}{\alpha}$ を満たす正の実数とする．次の各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ で定める．b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $b_n \geqq 1$ となることを示せ．

(3) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $|b_{n+1}-\alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha}|b_n-\alpha|$ となることを示せ．

(4) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して $|b_n-\alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha^n}$ となることを示せ．

(1) $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より，帰納的に $a_n>0$ となる

∴ 漸化式の両辺を $a_{n+1}\ (\neq 0)$ で割って，

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1+\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

よって，$b_{n+1}=1+(b_n)^{-1}$　すなわち，$\underline{b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}}$ $\cdots$①　//

(2) $a_n>0$ であることから，$b_n>0$

∴ $n\geqq 2$ のとき，$b_n=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}>1$

$n=1$ のとき，$b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=1$

以上より，$n=1,2,3,\cdots$ に対して，$b_n\geqq 1$ となる ▨

(3) $\alpha=1+\dfrac{1}{\alpha}$ $\cdots$②

①−②より，
$$b_{n+1}-\alpha=\frac{1}{b_n}-\frac{1}{\alpha}$$
$$=\frac{1}{\alpha b_n}\cdot(\alpha-b_n)$$

∴ $|b_{n+1}-\alpha|=\dfrac{1}{|\alpha|\cdot|b_n|}\cdot|b_n-\alpha|$

$\alpha>0$, $b_n\geqq 1$ より，$|b_{n+1}-\alpha|\leqq\dfrac{1}{\alpha}|b_n-\alpha|$ ▨

(4) (3)より，

$$|b_n-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha}|b_{n-1}-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha^2}|b_{n-2}-\alpha|\leqq\cdots\leqq\frac{1}{\alpha^{n-1}}|b_1-\alpha|=\frac{1}{\alpha^{n-1}}|1-\alpha|$$

ここで，$\alpha=1+\dfrac{1}{\alpha}$ より，$1-\alpha=-\dfrac{1}{\alpha}$ なので

$$|b_n-\alpha|\leqq\frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\left|-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{\alpha^n}$$ ▨