香川大学

2016年 教育学部・農学部 第1問

$\boxed{1}$ 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad 2b_{n+1} = a_n + 3b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) $c_n = a_n + b_n$ とおくとき，c_{n+1} と c_n の関係式を求めよ．

(2) c_n を n を用いて表せ．

(3) a_n，b_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(1) $a_{n+1} = 2a_n + b_n \cdots ①$ ， $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \cdots ②$

①＋②より，$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{5}{2}a_n + \frac{5}{2}b_n$

$\therefore \underline{c_{n+1} = \frac{5}{2}c_n}$ //

(2) $c_1 = a_1 + b_1 = 3$

∴ (1)より，数列 $\{c_n\}$ は初項3，公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列

$\therefore \underline{c_n = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}}$ //

(3) (2)より，$b_n = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - a_n \cdots ③$

これを①に代入して，

$$a_{n+1} = a_n + 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore n \geqq 2$ に対して，
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} \\ &= 1 + 3\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{5}{2}\right)} \\ &= -1 + 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$\therefore \underline{a_n = 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 1}$ // ③に代入して，$\underline{b_n = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}}$ //