

2016年 歯学部 第2問

2  $xyz$  空間において連立不等式

$$|x| \leq 1, \quad |y| \leq 1, \quad |z| \leq 1$$

の表す領域を  $Q$  とし、正の実数  $r$  に対して  $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$  の表す領域を  $S$  とする。また、 $Q$  と  $S$  のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を  $R$  とし、 $R$  の体積を  $V(r)$  とする。さらに

$x \geq 1$  の表す領域と  $S$  の共通部分を  $S_x$

$y \geq 1$  の表す領域と  $S$  の共通部分を  $S_y$

$z \geq 1$  の表す領域と  $S$  の共通部分を  $S_z$

とし、

$S_x \neq \phi$  を満たす  $r$  の最小値を  $r_1$

$S_x \cap S_y \neq \phi$  を満たす  $r$  の最小値を  $r_2$

$S_x \cap S_y \cap S_z \neq \phi$  を満たす  $r$  の最小値を  $r_3$

とする。ただし、 $\phi$  は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1)  $r = \frac{\sqrt{10}}{3}$  のとき、 $R$  の  $xy$  平面による断面を図示せよ。
- (2)  $r_1, r_2, r_3$  および  $V(r_1), V(r_3)$  を求めよ。
- (3)  $r \geq r_1$  のとき、 $S_x$  の体積を  $r$  を用いて表せ。
- (4)  $0 < r \leq r_2$  において、 $V(r)$  が最小となる  $r$  の値を求めよ。