0002116813887999

兵庫県立大学

2015年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2}, \\ n(n+1)(n+2)a_n = (n-1)n(n+1)a_{n-1} + 2 \qquad (n = 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_n を求めよ．

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(1) $b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおくと．

$b_n = b_{n-1} + 2$ $(n = 2, 3, \cdots)$

$\therefore$ $\{b_n\}$ は，初項が $b_1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot a_1 = 3$，公差が 2 の等差数列

$\therefore$ $b_n = 3 + 2(n-1)$ $\therefore$ $b_n = 2n+1$

$$\therefore\ a_n = \underline{\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}}\ //$$

(2)
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k(k+1)} + \frac{\frac{3}{2}}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2(n+2)}$$

$$= \frac{n(5n+7)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{7}{n}}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \underline{\frac{5}{4}}\ //$$