0002261278377999

弘前大学

2016年 文系 第3問

$\boxed{3}$ 半円 $C_1 : x^2+y^2=3,\ y>0$ と放物線 $C_2 : y=ax^2$ を考える．点 $(2,\ 0)$ を通り，C_1 と接する直線を ℓ とし，C_1 と ℓ の接点を T とする．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) C_2 が点 T を通るときの a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，C_2 と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とし，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S_2 とする．S_1-S_2 を求めよ．

(1) 接点を (p, q) $(q>0)$ とおくと，C_1 上にあるので，

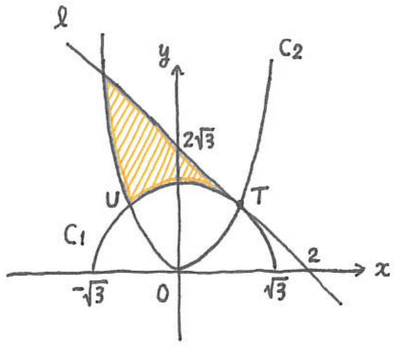
$p^2+q^2=3\ ,\ q>0 \quad \cdots ①$

このとき接線は $px+qy=3$ と表せ，これが $(2,0)$ を通るので

$2p=3 \quad \cdots ②$

①，②より，$p=\frac{3}{2}$，$q=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\therefore T\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$px+qy=3$ に代入して，$\underline{y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}$ //



(2) $T\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ なので

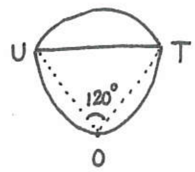
$\frac{\sqrt{3}}{2}=a\cdot\frac{9}{4}$　　$\therefore \underline{a=\frac{2\sqrt{3}}{9}}$ //

(3) C_1 と C_2 の交点で T でない方を U とおく

S_2 を線分 TU で上下に分けると，$\angle TOU=120^\circ$ より，

(上側) $=\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sin 120^\circ$

$=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}$



(下側) $=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}x^2\,dx$

$=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)dx$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3^3$

$=\sqrt{3}$

ℓ と C_2 の交点の x 座標を求めると，

$\frac{2\sqrt{3}}{9}x^2+\sqrt{3}x-2\sqrt{3}=0$ より，$x=-6, \frac{3}{2}$

$\therefore S_1=\int_{-6}^{\frac{3}{2}} -\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{9}x^2\,dx$

$=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\int_{-6}^{\frac{3}{2}}(x+6)\left(x-\frac{3}{2}\right)dx$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3$

$=\frac{125}{8}\sqrt{3}$

$\therefore S_1-S_2=\frac{125}{8}\sqrt{3}-\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)-\sqrt{3}=\underline{\frac{123}{8}\sqrt{3}-\pi}$ //