

2016年医学部第2問

2 r を $1 < r < 3$ を満たす実数, k を $|r - 2| < k < 1$ を満たす実数とする. また, 次の関数 $f(x)$ を考える.

$$f(x) = rx(1 - x)$$

以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = x$ を満たす x を求めよ.

以下の問題では, (1) で求めた x のうちで正のものを x_r とする.

(2) 次の条件

$$|x - x_r| < a \text{ を満たすすべての } x \text{ について } |f'(x)| < k$$

が成り立つような正の実数 a が存在することを証明せよ.

(3) (2) の a に対して, 数列 $\{x_n\}$ を

$$|x_1 - x_r| < a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める.

(i) すべての自然数 n について $|x_n - x_r| < a$ であることを証明せよ.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_r$ を証明せよ.