群馬大学

2015年 理工学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ すべての実数xにおいて，関数$f(x)$は微分可能で，その導関数$f'(x)$は連続とする．$f(x)$，$f'(x)$が等式

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = -e^{-x}+f(x)$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(0)$を求めよ．

(2) $f'(0)$を求めよ．

(3) $f(x)$を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$を求めよ．

(1) 与式の両辺に $x=0$ を代入して．

$0=-1+f(0) \quad \therefore\ \underline{f(0)=1}$ //

(2) 与式の両辺を x で微分して，

$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = e^{-x}+f'(x) \quad \cdots ①$

$x=0$ を代入して，

$\sqrt{1+\{f'(0)\}^2} = 1+f'(0)$

両辺を2乗して，

$1+\{f'(0)\}^2 = 1+2f'(0)+\{f'(0)\}^2$

$\therefore\ \underline{f'(0)=0}$ //

(3) ①式の両辺を2乗して．

$1+\{f'(x)\}^2 = e^{-2x}+2e^{-x}\cdot f'(x)+\{f'(x)\}^2$

$\therefore\ 2e^{-x}\cdot f'(x) = 1-e^{-2x}$

$\therefore\ f'(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}}$

$\therefore\ f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) \quad \therefore\ f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})+C \quad f(0)=1$ より $C=0$

$\therefore\ \underline{f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$ //

(4)

$$(与式) = \int_0^1 x\sqrt{1+\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x\cdot\sqrt{\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot(e^{x}-e^{-x})'\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[x(e^{x}-e^{-x})\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x}-e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2}\Big[e^{x}+e^{-x}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}-1-1\right)$$

$$= \underline{1-\frac{1}{e}} \ //$$