岐阜大学

2016 年 第 4 問

$\boxed{4}$ n を正の整数とする．$S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k \cdot 2^k}$ とおく．以下の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x}$ を数学的帰納法を用いて証明せよ．ただし，$x \neq 1$ とする．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})\,dx = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$ を示せ．

(3) $\displaystyle S_n = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$ を示せ．

(4) $\displaystyle 0 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \frac{1}{2^n} \log 2$ を示せ．

(5) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$ の値を求めよ．