福島大学

2015年 人文A 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 実数 x をこえない最大の整数を $[x]$ とし，$\langle x\rangle = x-[x]$ とする．また，a を定数として次の方程式を考える．

$$4\langle x\rangle^2-\langle 2x\rangle-a=0$$

ただし，$\langle x\rangle^2$ は $\langle x\rangle$ の二乗を表すとする．

(1) $x=1.7$ のとき $\langle x\rangle$ および $\langle 2x\rangle$ を求めなさい．

(2) α が上の方程式の解ならば，任意の整数 n について $\alpha+n$ も解であることを示しなさい．

(3) 上の方程式が解を持つような実数 a の範囲を求めなさい．

(1) $\langle x\rangle=\langle 1.7\rangle=1.7-[1.7]=1.7-1=\underline{0.7}$ //

$\langle 2x\rangle=\langle 3.4\rangle=3.4-[3.4]=3.4-3=\underline{0.4}$ //

(2) α が解のとき，$4\langle\alpha\rangle^2-\langle 2\alpha\rangle-a=0$ …① が成り立つ

このとき，$[\alpha+n]=[\alpha]+n$，$[2\alpha+2n]=[2\alpha]+2n$ なので，

$$\begin{aligned}4\langle\alpha+n\rangle^2-\langle 2\alpha+2n\rangle-a&=4(\alpha+n-[\alpha+n])^2-(2\alpha+2n-[2\alpha+2n])-a\\&=4\{\alpha+n-([\alpha]+n)\}^2-\{2\alpha+2n-([2\alpha]+2n)\}-a\\&=4(\alpha-[\alpha])^2-(2\alpha-[2\alpha])-a\\&=4\langle\alpha\rangle^2-\langle 2\alpha\rangle-a\\&=0\quad(\because ①より)\end{aligned}$$

よって，任意の整数 n について，$\alpha+n$ も解である ▨

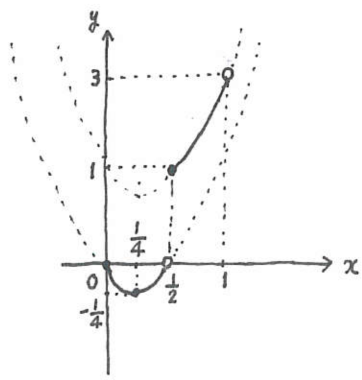
(3) (2)より，$0\leqq x<1$ の範囲に少なくとも1個の解をもつような実数 a の範囲を求めればよい．

(i) $0\leqq x<\frac{1}{2}$ のとき，$[x]=[2x]=0$ より，

$y=4\langle x\rangle^2-\langle 2x\rangle$ とおくと，

$$\begin{aligned}y&=4(x-[x])^2-(2x-[2x])\\&=4x^2-2x\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow =4(x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4}$



(ii) $\frac{1}{2}\leqq x<1$ のとき，$[x]=0$，$[2x]=1$ より，

$$\begin{aligned}y&=4\langle x\rangle^2-\langle 2x\rangle\\&=4(x-[x])^2-(2x-[2x])\\&=4x^2-2x+1\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow =4(x-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}$

(i)(ii)より，グラフは右のようになり，$y=a$ と共有点をもてばよいから，$\underline{-\frac{1}{4}\leqq a\leqq 0,\ 1\leqq a<3}$ //