2015年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 2n^3 + 9n^2 + 7n$ で表されるとする.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき, 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ.

(3) (2) で求めた T_n を一般項とする数列 $\{T_n\}$ について, $\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ.

(1) $a_1 = S_1 = 2+9+7 = 18$ …①

$n \geqq 2$ のとき. $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= 2n^3+9n^2+7n-2(n-1)^3-9(n-1)^2-7(n-1)$$

$$= 6n^2+12n$$

これに $n=1$ を代入すると ① が成り立つので, $n=1$ のときも満たしている.

$\therefore$ $\underline{a_n = 6n^2+12n \quad (n=1,2,3,\cdots)}$ //

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{6n^2+12n}$

$$\therefore b_n = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n(n+2)}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{12}\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\frac{1}{12}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{12}\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{12}\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{12}\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \underline{\frac{n(3n+5)}{24(n+1)(n+2)}}$$ //

(3) $$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(3+\frac{5}{n}\right)}{24\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \underline{\frac{1}{8}}$$ //