0002070909297999

福岡教育大学

2015年 初等教育 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $(x-3y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の項の係数を求めよ．

(2) a を定数とし，$0<a<1$ とする．不等式

$$\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y$$

が表す領域を図示せよ．

(3) n は3以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

(1) 多項定理より，x^4y^2z の係数は，

$$\frac{7!}{4!2!1!}\cdot 1^4\cdot(-3)^2\cdot 2^1 = 105\cdot 9\cdot 2$$
$$= \underline{1890}$$

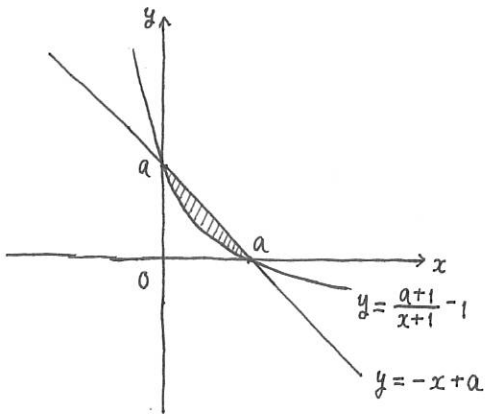
(2) 真数条件より，$a-x-y>0$ かつ $x>0$ かつ $y>0$

∴ $x>0$ かつ $y>0$ かつ $x+y<a$ …①

$\log_a(a-x-y) > \log_a xy$

∴ $0<a<1$ より，$a-x-y<xy$

∴ $x+1>0$ より，$y>\dfrac{a-x}{x+1}$ 　∴ $y>\dfrac{a+1}{x+1}-1$ …②



∴ 右図の斜線部分（ただし境界線は含まない）

(3) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=3$ のとき，

(左辺) $=2^3=8$，(右辺) $=\frac{1}{2}\cdot 3^2+3=\frac{15}{2}$ 　∴ 成り立つ

(ii) $n=k$ のとき，成り立つと仮定すると，$(k\geqq 3)$

$$2^k > \frac{1}{2}k^2 + k$$

両辺を2倍して，$2^{k+1} > k^2+2k$ …③

ここで，$k^2+2k-\left\{\frac{1}{2}(k+1)^2+k+1\right\} = \frac{1}{2}k^2-\frac{3}{2}$
$= \frac{1}{2}(k^2-3)$
> 0 （∵ $k\geqq 3$ より）

∴ $k^2+2k > \frac{1}{2}(k+1)^2+k+1$ …④

③，④より，$2^{k+1} > \frac{1}{2}(k+1)^2+k+1$ 　∴ $n=k+1$ のとき成り立つ　(i)，(ii)より，題意は示された ▨