

2014年農・工（環境建設）・教育・総合人間 第1問

1 次の問いに答えよ。

- (1) $AB = 1$, $\angle A = 90^\circ$ を満たす直角二等辺三角形 ABC において、辺 AB の中点を P , 辺 AC を $2:1$ に内分する点を Q , 線分 CP と線分 BQ の交点を R とする。このとき、線分 AR の長さを求めよ。
- (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{26}$ を小数で表すと、小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。ただし、必要ならば $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ。
- (3) k を実数とし、不等式 $x^2 - 2x - 3 > 0$, $x^2 - (k+1)x + k > 0$ を満たす実数 x の集合をそれぞれ A , B とする。このとき、 $A \subset B$ であるための必要十分条件を k を用いて表せ。

(1) $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$ とおくと、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

また、 $BR : RQ = s : (1-s)$ ($0 < s < 1$),

$PR : RC = t : (1-t)$ ($0 < t < 1$) とおくと、

$\vec{AR} = (1-s)\vec{a} + s\vec{AQ}$ より $\vec{AR} = (1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b}$... ①

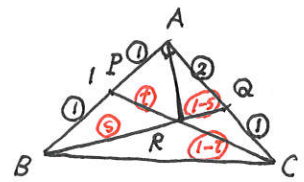
$\vec{AR} = (1-t)\vec{AP} + t\vec{b}$ より、 $\vec{AR} = \frac{1}{2}(1-t)\vec{a} + t\vec{b}$... ②

$\vec{a} \times \vec{b}$ より \vec{a}, \vec{b} は一次独立なので ①と②の係数を比較して、

$$\begin{cases} 1-s = \frac{1}{2}(1-t) \\ \frac{2}{3}s = t \end{cases}$$

よって、 $s = \frac{3}{4}$, $t = \frac{1}{2}$ ∴ ①より $\vec{AR} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

∴ $|\vec{AR}|^2 = \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = \frac{5}{16}$ ∴ $|\vec{AR}| = \frac{\sqrt{5}}{4}$ //



(2) N が小数第 n 位に初めて0でない数字が現れる

$\Leftrightarrow 10^{-n} \leq N < 10^{-n+1}$

よって、 $10^{-n} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{26} < 10^{-n+1}$ ∴ $-n \leq 26 \log_{10} \frac{1}{3} < -n+1$

∴ $n \geq 26 \log_{10} 3 > n-1$ ∴ $n \geq 26 \log_{10} 3 = 12.4046$ ∴ $n = 13$ //

(3) $x^2 - 2x - 3 > 0$ より $(x-3)(x+1) > 0$ ∴ $x > 3, -1 > x$

$x^2 - (k+1)x + k > 0$ より、 $(x-k)(x-1) > 0$

(i) $k > 1$ のとき、 $A = \{x \mid x > 3, -1 > x\}$, $B = \{x \mid x > k, 1 > x\}$

∴ $1 < k \leq 3$

(ii) $k < 1$ のとき、 $-1 \leq k < 1$ (iii) $k = 1$ のとき 成り立つ。

(i) ~ (iii) より、 $-1 \leq k \leq 3$ //

