0002174095287999

同志社大学

2016年 理系全学部日程 第1問　1枚目/2枚目.

数理 石井K

1 次の $\boxed{}$ に適する数または式を記入せよ．

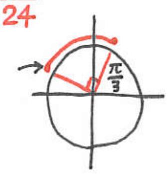
(1) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ とする．関数 $f(\theta) = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ は最小値 $\boxed{ア}$ (1) を $\theta = \boxed{イ}$ ($\frac{\pi}{2}$) でとる．関数 $g(\theta) = \sqrt{3}f(\theta) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ は最小値 $\boxed{ウ}$ (2) を $\theta = \boxed{エ}$ (0) でとる．

(2) 箱から玉を1個取り出し，この玉に1個の玉を新たに加えた合計2個の玉を箱に戻す試行を繰り返す．新たに加える玉の色は白あるいは黒のみとする．最初に，2個の白玉と3個の黒玉が入っている箱を考える．新たに加える玉の色は取り出した玉と同色とすると，3回目の試行において白玉を取り出す確率は $\boxed{オ}$，n 回目の試行において白玉を取り出す確率 P_n は $\boxed{カ}$，極限 $\lim_{n\to\infty} P_n$ は $\boxed{キ}$ である．($\frac{2}{5}$) 次に，3個の白玉と4個の黒玉が入っている箱を考える．新たに加える玉の色は取り出した玉と異なる色とすると，3回目の試行において白玉を取り出す確率は $\boxed{ク}$ ($\frac{11}{24}$) である．n 回目の試行において白玉を取り出す確率を Q_n とすると，Q_n は漸化式 $Q_n = \boxed{ケ}\,Q_{n-1} + \frac{1}{6+n}$ $(n \geqq 2)$ を満たし，極限 $\lim_{n\to\infty} Q_n$ は $\boxed{コ}$ である．

$\frac{4+n}{6+n}$　$\frac{11}{24}$　$\frac{1}{2}$

(1) $f(\theta) = 2\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2} + \cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$



$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{5}{6}\pi$

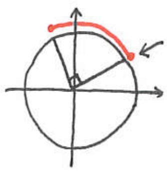
∴ $f(\theta)$ は最小値 1 を $\theta = \frac{\pi}{2}$ でとる //

$g(\theta) = 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

$= 4\left\{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\right\}$

$= 4\sin\left\{\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right\}$

$= 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$



$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{2}{3}\pi$

∴ $g(\theta)$ は最小値 2 を $\theta = 0$ でとる //

(2) 箱 ○○●●●

(i) 白→白→白と取り出す確率　$\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{4}{7} = \frac{4}{35}$

(ii) 白→黒→白　〃　$\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{7} = \frac{3}{35}$

(iii) 黒→白→白　〃　$\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{7} = \frac{3}{35}$

(iv) 黒→黒→白　〃　$\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{7} = \frac{4}{35}$

(i)〜(iv)より，

3回目に白玉を取り出す確率は，

$\frac{4+3+3+4}{35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$ //

同様に2回目に白玉を取り出す確率も

$\frac{2}{5}$ となり，

$P_n = \frac{2}{5}$，$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{2}{5}$ //

と予想できる．

記述式の場合はこれを確率漸化式を作って示す必要がある．

2016年 理系全学部日程 第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

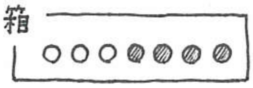
$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ に適する数または式を記入せよ．

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．関数 $f(\theta) = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ は最小値 $\boxed{\text{ア}}$ を $\theta = \boxed{\text{イ}}$ でとる．関数 $g(\theta) = \sqrt{3}f(\theta) - 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ は最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ を $\theta = \boxed{\text{エ}}$ でとる．

(2) 箱から玉を1個取り出し，この玉に1個の玉を新たに加えた合計2個の玉を箱に戻す試行を繰り返す．新たに加える玉の色は白あるいは黒のみとする．最初に，2個の白玉と3個の黒玉が入っている箱を考える．新たに加える玉の色は取り出した玉と同色とすると，3回目の試行において白玉を取り出す確率は $\boxed{\text{オ}}$，n 回目の試行において白玉を取り出す確率 P_n は $\boxed{\text{カ}}$，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ は $\boxed{\text{キ}}$ である．次に，3個の白玉と4個の黒玉が入っている箱を考える．新たに加える玉の色は取り出した玉と異なる色とすると，3回目の試行において白玉を取り出す確率は $\boxed{\text{ク}}$ である．n 回目の試行において白玉を取り出す確率を Q_n とすると，Q_n は漸化式 $Q_n = \boxed{\text{ケ}}\,Q_{n-1} + \dfrac{1}{6+n}$ $(n \geqq 2)$ を満たし，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q_n$ は $\boxed{\text{コ}}$ である．

(2) のつづき.

箱



(i) 白 → 白 → 白 と取り出す確率　$\dfrac{3}{7} \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{3}{9}$

(ii) 白 → 黒 → 白　〃　$\dfrac{3}{7} \times \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{9}$

(iii) 黒 → 白 → 白　〃　$\dfrac{4}{7} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{4}{9}$

(iv) 黒 → 黒 → 白　〃　$\dfrac{4}{7} \times \dfrac{4}{8} \times \dfrac{5}{9}$

(i)〜(iv) より，3回目に白玉を取り出す確率は．$\dfrac{27+60+64+80}{7\times8\times9} = \dfrac{231}{7\cdot8\cdot9} = \underline{\dfrac{11}{24}}$ 〃

n 回目 $(n \geqq 2)$ に白玉を取り出すのは．
- ・$n-1$ 回目に黒玉を取り出し，n 回目で追加された白玉を取り出すとき．
- ・追加された玉でない玉から白玉を取り出すとき．

よって，$Q_n = \underbrace{\dfrac{1}{6+n}\cdot(1-Q_{n-1})}_{\text{追加された白玉をとる}} + \underbrace{\dfrac{5+n}{6+n}\cdot Q_{n-1}}_{\text{元からあった白玉をとる.}}$

$= \underline{\dfrac{4+n}{6+n}Q_{n-1} + \dfrac{1}{6+n}}$ 〃

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q_n$ は収束すると仮定すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} Q_{n-1}$ でこの値を α とすると，上の漸化式より，

記述式ではちゃんと示す必要があります．今回は略．

$\alpha = \dfrac{4+n}{6+n}\alpha + \dfrac{1}{6+n}$　$\therefore\ \alpha = \underline{\dfrac{1}{2}}$ 〃