

2016年 医学部 第4問

4 次の問いに答えなさい。ただし、チには X ~ Z に入る言葉の組合せとして最も適切なものを、下の選択肢 ①~⑥のうちから一つ選びなさい。

複素数 α を $\alpha = -7 + 4\sqrt{3}i$ とし、実数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_n + 4\sqrt{3}b_n i = \alpha^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 i は虚数単位である。 a_n と b_n を α とその共役な複素数 $\bar{\alpha}$ で表すと

$$a_n = \frac{\alpha^n + (\bar{\alpha})^n}{\text{ア}}, \quad b_n = \frac{\alpha^n - (\bar{\alpha})^n}{\text{イ} \sqrt{\text{ウ}} i}$$

となるので、数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2} + \text{エオ} a_{n+1} + \text{カキ} a_n = 0 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$b_{n+2} + \text{エオ} b_{n+1} + \text{カキ} b_n = 0 \quad \dots\dots \text{②}$$

を満たす。これらを用いて、すべての自然数 n に対して

$$a_n \text{ と } b_n \text{ が互いに素な整数である} \quad \dots\dots (*)$$

ことを、数学的帰納法により証明する。

(i) $n = 1, 2$ のとき

$$a_1 = \text{クケ}, \quad b_1 = \text{コ}, \quad a_2 = \text{サ}, \quad b_2 = \text{シスセ}$$

であるから、 $(*)$ が成り立つ。

(ii) $n = k, k+1$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する。

まず①, ②より、 a_{k+2}, b_{k+2} は X である。ここで

$$a_n^2 + 48b_n^2 = \text{ソタ}^n \quad \dots\dots \text{③}$$

がすべての自然数 n で成り立つ。ソタ が Y であるから、 a_{k+2}, b_{k+2} が Z と仮定すると③より、これら2数は ソタ の倍数でなければならない。ところが、このとき①, ②より a_{k+1}, b_{k+1} は ソタ の倍数となり、数学的帰納法の仮定と矛盾する。よって、 $n = k+2$ のときも $(*)$ が成り立つ。

(i), (ii) より、すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ。

チ の選択肢

- | | X | Y | Z | | X | Y | Z |
|---|----|----|---------|---|----|----|---------|
| ① | 整数 | 素数 | 互いに素でない | ② | 整数 | 素数 | 互いに素である |
| ③ | 素数 | 素数 | 互いに素でない | ④ | 整数 | 整数 | 互いに素である |
| ⑤ | 素数 | 整数 | 互いに素でない | ⑥ | 素数 | 整数 | 互いに素である |