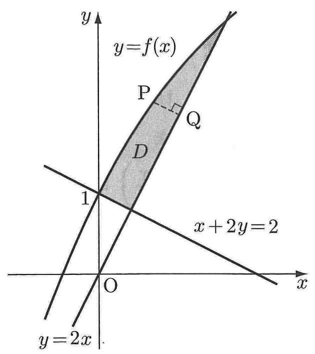
2014年 医学部 第5問

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=2x+\cos x$ がある．xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分を C とし，C と直線 $y=2x$，および直線 $x+2y=2$ で囲まれた領域を D とする．領域 D を直線 $y=2x$ の周りに1回転してできる立体の体積を求めよう．



C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ から直線 $y=2x$ に下ろした垂線と直線 $y=2x$ との交点を Q とする．
線分 PQ の長さは

$$\frac{|\cos t|}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$$

であり，点 Q の x 座標は

$$t+\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cos t$$

である．これから，$\mathrm{OQ}=s$ とおくと

$$s=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\left(t+\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cos t\right)$$

である．
$f'(x)=2-\sin x>0$ なので $f(x)$ は増加する．よって，求める体積 V は

$$V=\int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}\pi}{2}} \pi \mathrm{PQ}^2\,ds$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\,\pi}{\boxed{\text{カ}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\cos^2 t\sin t\right)dt$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\,\pi^2}{\boxed{\text{コサ}}}-\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である．