2013 年 第 3 問

$\boxed{3}$ 下の問いに答えよ.

(1) 方程式 $x\cos x = \sin x$ は $\dfrac{4\pi}{3} < x < 2\pi$ の範囲にただ 1 つの解をもつことを示せ.

(2) (1) の解を α とおくとき, $0 < x < 2\pi$ において不等式

$$\frac{\sin x}{x} \geqq -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} > -\frac{3}{4\pi}$$

が成り立つことを示せ.