＿＿＿年　番号＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 三角形ABCの3辺の長さを $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$ とする．実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，Aを始点としBを通る半直線上に $\mathrm{AP} = tc$ となるように点Pをとる．次の問いに答えよ．

(1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ．

(2) 点Pが $\mathrm{CP} = a$ を満たすとき，t を求めよ．

(3) (2)の条件を満たす点Pが辺AB上にちょうど2つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ．

（九州大学　2010）

$\boxed{2}$ 次のような競技を考える．競技者がサイコロを振る．もし，出た目が気に入ればその目を得点とする．そうでなければ，もう1回サイコロを振って，2つの目の合計を得点とすることができる．ただし，合計が7以上になった場合は得点は0点とする．この取決めによって，2回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう．次の問いに答えよ．

(1) 競技者が常にサイコロを2回振るとすると，得点の期待値はいくらか．

(2) 競技者が最初の目が6のときだけ2回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか．

(3) 得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに2回目を振るとよいか．

（九州大学　2010）

$\boxed{3}$ xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ．C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする．次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする．次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする．以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ．

(2) 三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ．

(3) 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の面積 S_n を求めよ．

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ．

（九州大学　2010）

$\boxed{4}$ 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす．このとき円上の定点Pが原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする．次の問いに答えよ．

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点Pの座標を求めよ．

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点Pの描く曲線を C とする．曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) (2) の曲線 C の長さを求めよ．

（九州大学　2010）

$\boxed{5}$ 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする．ただし，$t>1$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) H の座標を t を用いて表せ．

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ．

(3) $x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ．

(4) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ．

（九州大学　2011）

$\boxed{6}$ 数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ．

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(3) $a_1 = \tan\dfrac{\pi}{7}$ とする．$a_k = a_1$ をみたす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ．

（九州大学　2011）

$\boxed{7}$ 平面上に直角三角形ABCがあり，その斜辺BCの長さを2とする．また，点Oは $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 辺BCの中点をMとするとき，点Aは線分OMの中点となることを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=10$ となることを示せ．

(3) $4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ をみたす点をPとするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ．

（九州大学　2011）

$\boxed{8}$ 1から4までの数字が1つずつ書かれた4枚のカードがある．その4枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える．

操作： 1から4までの数字が1つずつ書かれた4個の球が入っている袋から同時に2個の球を取り出す．球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる．その後，2個の球は袋に戻す．

初めにカードを左から順に1，2，3，4と並べ，上の操作を2回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ．

(1) カードが左から順に1，2，3，4と並ぶ確率を求めよ．

(2) カードが左から順に4，3，2，1と並ぶ確率を求めよ．

(3) 左端のカードの数字が1になる確率を求めよ．

(4) 左端のカードの数字の期待値を求めよ．

（九州大学　2011）

$\boxed{9}$ 1から4までの数字が1つずつ書かれた4枚のカードがある．その4枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える．

操作：1から4までの数字が1つずつ書かれた4個の球が入っている袋から同時に2個の球を取り出す．球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる．その後，2個の球は袋に戻す．

初めにカードを左から順に1，2，3，4と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ．

(1) $n=2$ のとき，カードが左から順に1，2，3，4と並ぶ確率を求めよ．

(2) $n=2$ のとき，カードが左から順に4，3，2，1と並ぶ確率を求めよ．

(3) $n=2$ のとき，左端のカードの数字が1になる確率を求めよ．

(4) $n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ．

（九州大学　2011）

$\boxed{10}$ 円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

（九州大学　2012）

$\boxed{11}$ 実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この方程式が実数解を持つような a の範囲を，n を用いて表せ．

(2) この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ．

（九州大学　2012）

$\boxed{12}$ p と q はともに整数であるとする．2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α，β を持ち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) \neq 0$ をみたしているとする．このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義する．以下の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 は整数であることを示せ．

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ．ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．

（九州大学　2012）

$\boxed{13}$ いくつかの玉が入った箱Aと箱Bがあるとき，次の試行Tを考える．

(試行T)　箱Aから2個の玉を取り出して箱Bに入れ，その後，
箱Bから2個の玉を取り出して箱Aに入れる．

最初に箱Aに黒玉が3個，箱Bに白玉が2個入っているとき，以下の問いに答えよ．

(1) 試行Tを1回行ったときに，箱Aに黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ．

(2) 試行Tを2回行ったときに，箱Aに黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1, 2, 3)$ を求めて既約分数で表せ．

(3) 試行Tを3回行ったときに，箱Aの中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ．

（九州大学　2012）