______年　番号______　氏名______________________________

$\boxed{1}$ $\triangle$OABにおいて，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=7$とする．tを$0<t<1$を満たす実数とする．辺OAを$t:(1-t)$に内分する点をP，辺OBを$1:t$に外分する点をQ，辺ABと線分PQの交点をRとする．点Rから直線OBへ下ろした垂線をRSとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$t$，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$を$t$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(4) 線分OSの長さが4となるtの値を求めよ．

（新潟大学　2016）

$\boxed{2}$ 平面上に同一直線上にない３点 A，B，C が与えられているとし，△ABC の内部の点 P が

$$4\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 7\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{0}$$

を満たしているとする．線分 AP を延長した直線と線分 BC との交点を Q，線分 BP を延長した直線と線分 AC との交点を R とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．

(2) 点 P は線分 AQ を $\boxed{\text{キ}} : \boxed{\text{ク}}$ に内分する点であり，点 Q は線分 BC を $\boxed{\text{ケ}} : \boxed{\text{コ}}$ に内分する点である．

(3) △APB の面積を S，四角形 CQPR の面積を T とおくと，

$$S : T = \boxed{\text{サ}} : \boxed{\text{シ}}\boxed{\text{ス}}$$

である．

（東京理科大学　2014）

$\boxed{3}$ 平面上のベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ が $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{5}$ と $|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=2$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $|\overrightarrow{a}|=k$ とするとき，$|\overrightarrow{b}|$ と $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるとき，$|\overrightarrow{a}|$ と $|\overrightarrow{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

（和歌山大学　2012）

$\boxed{4}$ 以下の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=\boxed{\text{ネ}}\,n^2+\boxed{\text{ノ}}\,n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{\boxed{\text{ハ}}\,n}{\boxed{\text{ヒ}}\,n+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k 2^{k-1}=\frac{1}{\boxed{\text{フ}}}\left(\boxed{\text{ヘ}}^{\,n}-1\right)$

（西南学院大学　2015）

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 4a_n - n$ を満たしている.

(1) a_1 を求めよ.

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

(3) $b_n = a_n + c$ とおくとき, $\{b_n\}$ が等比数列になるように定数 c の値を決めよ.

(4) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(広島工業大学　2013)

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = \dfrac{2}{3}$，$a_{n+1} = \dfrac{2 - a_n}{3 - 2a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $a_{n+1} - a_n < \dfrac{1}{5000}$ を満たす最小の n を求めよ．

（岡山県立大学　2011）

$\boxed{7}$ 下記に示す四角形 ABCD およびそれに外接する円がある．AB $= 5$，BC $= 6$，CD $= 5$，DA $= 4$ とする．また，$\angle \mathrm{BAD} = \theta$，$\angle \mathrm{BCD} = 180^\circ - \theta$ とする．このとき，以下の各問いに答えなさい．

(1) $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) BD の長さを求めよ．

(3) ABCD の面積を求めよ．

（沖縄国際大学　2015）

$\boxed{8}$ 次の問いに答えなさい．

(1) $(a+b)^6$ を展開したとき，a^3b^3 の係数を求めなさい．

(2) $(a+b+c)^6$ を展開したとき，a^3b^2c の係数を求めなさい．

（龍谷大学　2014）

新潟大学

2016年 文系 第2問

数理 石井K

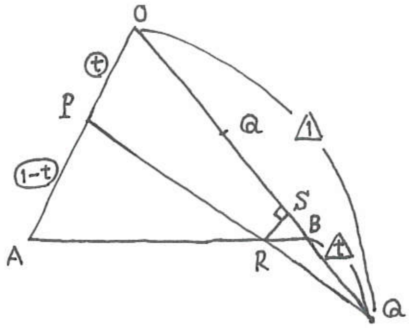
$\boxed{2}$ △OABにおいて，OA = 5，OB = 6，AB = 7とする．tを$0 < t < 1$を満たす実数とする．辺OAを$t:(1-t)$に内分する点をP，辺OBを$1:t$に外分する点をQ，辺ABと線分PQの交点をRとする．点Rから直線OBへ下ろした垂線をRSとする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OR}$をt，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{OS}$をt，$\vec{b}$を用いて表せ．

(4) 線分OSの長さが4となるtの値を求めよ．



(1) 余弦定理より，$\cos\angle AOB = \dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6} = \dfrac{1}{5}$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB$

$= 5\cdot6\cdot\dfrac{1}{5}$

$= \underline{6}$ //

(2) メネラウスの定理より，$\dfrac{1-t}{t}\cdot\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{BR}{RA} = 1$

$\therefore\ RA:BR = 1-t : t^2$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OR} = \dfrac{t^2}{1-t+t^2}\vec{a} + \dfrac{1-t}{1-t+t^2}\vec{b}}$ //

(3) $\overrightarrow{OS} = k\vec{b}$ とおくと，

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS}$

$= \dfrac{t^2}{1-t+t^2}\vec{a} + \left(\dfrac{1-t}{1-t+t^2} - k\right)\vec{b}$

$\overrightarrow{SR}\perp\vec{b}$ より，$\overrightarrow{SR}\cdot\vec{b} = 0$

$\overrightarrow{SR}\cdot\vec{b} = \dfrac{t^2}{1-t+t^2}\cdot6 + \left(\dfrac{1-t}{1-t+t^2} - k\right)\cdot36$

$\therefore\ t^2 + 6\{1-t-k(1-t+t^2)\} = 0$ 　　$t^2-t+1 = \left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$ であるから

$\therefore\ k = \dfrac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}$ 　　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OS} = \dfrac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}\vec{b}}$ //

$0<t<1$ において，$t^2-6t+6>0$，$t^2-t+1>0$ なので $|\overrightarrow{OS}| = \dfrac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}|\vec{b}|$

$\therefore\ 4 = \dfrac{t^2-6t+6}{t^2-t+1}$ 　　$\Longleftrightarrow\ 3t^2+2t-2 = 0$

$\therefore\ t = \dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$ 　　$0<t<1$ より $\underline{t = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}}$ //

2014年 基礎工 第2問

$\boxed{2}$ 平面上に同一直線上にない3点A，B，Cが与えられているとし，△ABCの内部の点Pが

$$4\overrightarrow{AP}+7\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$$

を満たしているとする．線分APを延長した直線と線分BCとの交点をQ，線分BPを延長した直線と線分ACとの交点をRとおく．

(1) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}\boxed{ウ}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}\boxed{カ}}\overrightarrow{AC}$ である．　$\frac{7}{13}$　$\frac{2}{13}$

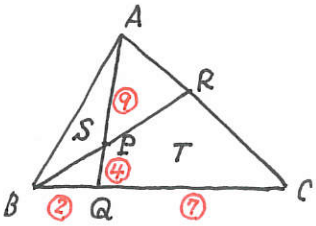
(2) 点Pは線分AQを $\boxed{キ}$: $\boxed{ク}$ に内分する点であり，点Qは線分BCを $\boxed{ケ}$: $\boxed{コ}$ に内分する点である．　9　4　2　7

(3) △APBの面積を S，四角形CQPRの面積を T とおくと，

$$S:T=\boxed{サ}:\boxed{シ}\boxed{ス}$$

9　3　5

である．



(1) $4\overrightarrow{AP}+7(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{AP}=\frac{7}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{13}\overrightarrow{AC}}$ //

(2) $\overrightarrow{AP}=\frac{9}{13}\left(\frac{7}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right)$　$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{9}{13}\overrightarrow{AQ}$ となるので

点Pは線分AQを $\underline{9:4}$ // に内分する．また，点Qは線分BCを $\underline{2:7}$ // に内分する．

(3) $S=\triangle ABC\times\frac{2}{9}\times\frac{9}{13}=\triangle ABC\times\frac{2}{13}$

メネラウスの定理より．

$\frac{AR}{RC}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{4}{9}=1$　$\therefore\ AR:RC=1:2$

$T=\triangle ABC\times\frac{7}{9}-\underbrace{\triangle ABC\times\frac{1}{3}\times\frac{9}{13}\times\frac{7}{9}}_{=\triangle APR}$

$=\triangle ABC\times\frac{70}{117}$

$\therefore\ S:T=\frac{2}{13}:\frac{70}{117}$

$=18:70$

$=\underline{9:35}$ //

和歌山大学

2012年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ と $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $|\vec{a}|=k$ とするとき，$|\vec{b}|$ と $\vec{a}\cdot\vec{b}$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるとき，$|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ の値をそれぞれ求めよ．

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ より，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5$ …①

$|2\vec{a}-\vec{b}|=2$ より，$4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ …②

②−①より．$3|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

$|\vec{a}|=k$ であるから，$\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}}$ //

①×2−②より，$-2|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=6$

$|\vec{a}|=k$ であるから，$|\vec{b}|^2=2k^2+6$　　$\therefore\ \underline{|\vec{b}|=\sqrt{2k^2+6}}$ //

(2) $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ が成り立つので (1)の結果を代入して，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}}{k\sqrt{2k^2+6}}\qquad\therefore\ 2k\sqrt{k^2+3}=3k^2+1$$

両辺とも正なので2乗して，$4k^2(k^2+3)=9k^4+6k^2+1$

$\therefore\ 5k^4-6k^2+1=0$

$\therefore\ (5k^2-1)(k^2-1)=0$

$\therefore\ k=|\vec{a}|>0$ より．$k=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 1

よって $\underline{|\vec{a}|=\frac{\sqrt{5}}{5},\ |\vec{b}|=\frac{4\sqrt{10}}{5}\ \text{または，}\ |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2\sqrt{2}}$ //

2015年 神学・経済 第4問

数理 石井K

4 以下の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=\boxed{\text{ネ}}\,n^2+\boxed{\text{ノ}}\,n$　　ネ: 1　ノ: 2

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{\boxed{\text{ハ}}\,n}{\boxed{\text{ヒ}}\,n+1}$　　ハ: 1　ヒ: 2

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k2^{k-1}=\frac{1}{\boxed{\text{フ}}}\left(\boxed{\text{ヘ}}^{\,n}-1\right)$　　フ: 3　ヘ: 4

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\underline{n^2+2n}$ //

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\underline{\frac{n}{2n+1}}$ //

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cdot2^{k-1}=-1+2-2^2+2^3-2^4+\cdots+2^{2n-1}$　（初項 −1，公比 −2 の等比数列の和）

$=\frac{-1\{1-(-2)^{2n}\}}{1-(-2)}$

$=\frac{1}{3}\{(-2)^{2n}-1\}$

$=\underline{\frac{1}{3}(4^n-1)}$ //

広島工業大学

2013年工・情報・環境学部(A)第2問

数理 石井K

2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 4a_n - n$ を満たしている.

(1) a_1 を求めよ.

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

(3) $b_n = a_n + c$ とおくとき, $\{b_n\}$ が等比数列になるように定数 c の値を決めよ.

(4) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = S_1 = 4a_1 - 1 \quad \therefore 3a_1 = 1 \quad \therefore \underline{a_1 = \frac{1}{3}}$ //

(2) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$= 4a_{n+1} - (n+1) - 4a_n + n$

$\therefore 3a_{n+1} = 4a_n + 1 \quad \therefore \underline{a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n + \frac{1}{3}}$ //

(3) $b_n = a_n + c \iff a_n = b_n - c$ これを(2)で求めた式に代入して

$3(b_{n+1} - c) = 4(b_n - c) + 1$

$\therefore 3b_{n+1} = 4b_n - c + 1$

$\{b_n\}$ が等比数列になるので, $\underline{c = 1}$ //

(4) (3)より. $c = 1$ のとき. $b_{n+1} = \frac{4}{3}b_n$

$\therefore \{b_n\}$ は初項 $a_1 + c = \frac{4}{3}$, 公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列

$\therefore b_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

$\therefore a_n + 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

$\therefore \underline{a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}$ //

2011 年 第 2 問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が, $a_1=\dfrac{2}{3}$, $a_{n+1}=\dfrac{2-a_n}{3-2a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている. 次の問いに答えよ.

(1) a_2, a_3 を求めよ.

(2) 一般項 a_n を推定し, それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ.

(3) $a_{n+1}-a_n<\dfrac{1}{5000}$ を満たす最小の n を求めよ.

(1) $a_2=\dfrac{2-a_1}{3-2a_1}=\dfrac{2-\frac{2}{3}}{3-\frac{4}{3}}=\underline{\dfrac{4}{5}}$ // $\quad a_3=\dfrac{2-a_2}{3-2a_2}=\dfrac{2-\frac{4}{5}}{3-\frac{8}{5}}=\underline{\dfrac{6}{7}}$ //

(2) $a_n=\dfrac{2n}{2n+1}$ と推定, 数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき. $a_1=\dfrac{2}{3}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると, $a_k=\dfrac{2k}{2k+1}$

∴漸化式より. $a_{k+1}=\dfrac{2-a_k}{3-2a_k}$

$$=\frac{2-\frac{2k}{2k+1}}{3-\frac{4k}{2k+1}}$$

$$=\frac{2(2k+1)-2k}{3(2k+1)-4k}$$

$$=\frac{2(k+1)}{2(k+1)+1}$$

∴ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より. すべての自然数 n について成り立つ ▨

(3) (2) より.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2n+2}{2n+3}-\frac{2n}{2n+1}=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\therefore\ \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}<\frac{1}{5000}\iff(2n+1)(2n+3)>10000$$

単調増加.

$N=2n+2$ とおくと, $\iff N^2>10001=10^4+1$

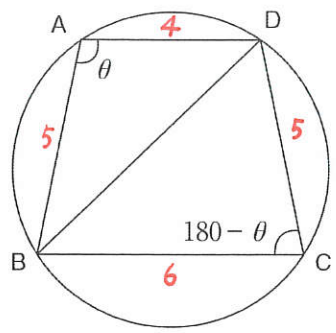
$\therefore N\geqq101\quad\therefore 2n+2\geqq101\quad 2n\geqq99$

$\therefore\ \underline{n=50}$ //

2015年 地域環境政策学科・産業情報学科 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 下記に示す四角形ABCDおよびそれに外接する円がある．AB = 5，BC = 6，CD = 5，DA = 4とする．また，∠BAD = θ，∠BCD = 180° − θとする．このとき，以下の各問いに答えなさい．



(1) $\cos\theta$の値を求めよ．

(2) BDの長さを求めよ．

(3) ABCDの面積を求めよ．

(1) △ABD，△BCDそれぞれに余弦定理を適用して，

$BD^2 = 5^2 + 4^2 - 2\cdot5\cdot4\cos\theta \cdots ①$

$BD^2 = 6^2 + 5^2 - 2\cdot6\cdot5\cos(180° - \theta) \cdots ②$

ここで $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ より，

$BD^2 = 6^2 + 5^2 + 2\cdot6\cdot5\cos\theta \cdots ②'$

②′−①より，$0 = 20 + 100\cos\theta$　　∴ $\underline{\cos\theta = -\frac{1}{5}}$ //

(2) ①より，$BD^2 = 41 - 40\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = 49$　　∴ $\underline{BD = 7}$ //

(3) $\sin^2\theta + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1$ より，$\sin^2\theta = \frac{24}{25}$

$0° < \theta < 180°$ より，$\sin\theta = \sin(180° - \theta) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

∴ $S = \triangle ABD + \triangle BCD$

$= \frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$= \underline{10\sqrt{6}}$ //

0001875454218999

龍谷大学

2014年 文系 第1問

数理
石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい．

(1) $(a+b)^6$ を展開したとき，a^3b^3 の係数を求めなさい．

(2) $(a+b+c)^6$ を展開したとき，a^3b^2c の係数を求めなさい．

(1) 二項定理より．${}_6C_3 = \underline{20}$ //

(2) 多項定理より

$$\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{2} = \underline{60}$$ //