

1 $a > 0$ とする. $x > 0$ で定義された関数 $y = x^2 + ax - 3a^2 \log x$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の範囲を求めよ.

(兵庫県立大学 2016)

2 以下の問いに答えよ。なお、必要があれば以下の極限値の公式を用いてもよい。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

(1) 方程式 $2^x = x^2$ ($x > 0$) の実数解の個数を求めよ。

(2) a を正の実数とし、 x についての方程式 $a^x = x^a$ ($x > 0$) を考える。

(i) 方程式 $a^x = x^a$ ($x > 0$) の実数解の個数を求めよ。

(ii) 方程式 $a^x = x^a$ ($x > 0$) で a, x がともに正の整数となる a, x の組 (a, x) をすべて求めよ。ただし $a \neq x$ とする。

(浜松医科大学 2016)

3 a を定数とし、関数 $f(x) = (x - a)e^{\frac{x^2}{2}}$ で表される曲線 $y = f(x)$ を C とする。ただし、 e は自然対数の底とする。以下の各問に答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ が極値を持たないために a が満たすべき条件を求めよ。

(3) 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めよ。

(4) (3) で求めた接線が原点を通るような t の値を考える。すべての実数の中で、そのような t の値が3つあるために a が満たすべき条件を求めよ。

(茨城大学 2016)

4 関数 $f(x) = x^2(2x^2 - x - 2)e^x$ がある。次の問いに答えなさい。

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかきなさい。ただし、凹凸は調べなくてよい。また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ であることは断りなしに用いてもよい。

(2) a を定数とする。2つの曲線 $y = 2x^4 - x^3 - 2x^2$ と $y = ae^{-x}$ の共有点の数が3個であるための a の条件を求めなさい。

(前橋工科大学 2016)

5 次の条件 (*) を満たすような実数 a で最大のものを求めよ.

(*) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leq 1 - ax^2$ が成り立つ.

(信州大学 2015)

6 b を $b > 2\sqrt{2}$ を満たす実数とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) $f(x) = x + (e^x - b)e^x$ とするとき、方程式 $f(x) - a = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

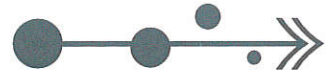
(2) 実数 a が (1) で求めた範囲にあるとする。このとき、点 (a, b) を中心とする円で、曲線 $y = e^x$ と異なる 4 点で交わるものが存在することを示せ。

(香川大学 2015)

7 次の問いに答えよ.

- (1) xy 平面において, 関数 $y = \frac{\log x}{x^2}$ ($x > 0$) の増減を調べ, グラフの概形をかけ. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$ を用いてよい.
- (2) a を定数とする. xy 平面において, 2つの曲線 $y = ax^2$ と $y = \log x$ の共有点の個数を調べよ.

(愛知工業大学 2015)



2015年 医学部 第5問

5 次の条件(*)を満たすような実数 a で最大のものを求めよ.(*) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leq 1 - ax^2$ が成り立つ.

$$\cos x \leq 1 - ax^2 \iff \frac{1 - \cos x}{x^2} \geq a \quad (x \neq 0)$$

 $x=0$ のときは成り立つ

よって、(*) $\iff 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ のすべての x に対して、 $\frac{1 - \cos x}{x^2} \geq a$
 $f(x)$: 偶関数より $= f(x)$ とおく

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot x^2 - (1 - \cos x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{x^3}$$

$$g(x) = x \sin x + 2 \cos x - 2$$

$$g'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x \\ = x \cos x - \sin x$$

$$g''(x) = -x \sin x$$

$\therefore 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $g''(x) < 0 \quad \therefore g'(x)$ は単調減少

$g'(0) = 0$ なので、 $g'(x) < 0 \quad \therefore g(x)$ は単調減少

$g(0) = 0$ なので、 $g(x) < 0$ すなわち、 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $f'(x) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ = \frac{1}{2}$$

\therefore 単調減少表より、グラフは右のようになる。

$$\therefore a \leq \frac{4}{\pi^2} \quad \therefore \text{最大のものは、} a = \frac{4}{\pi^2}$$

x	(0)	\dots	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$(\frac{1}{2})$	\searrow	$\frac{4}{\pi^2}$

