______年　番号______　　氏名______________________________

$\boxed{1}$ 四面体OABCにおいて，Pを辺OAの中点，Qを辺OBを$2:1$に内分する点，Rを辺BCの中点とする．P，Q，Rを通る平面と辺ACの交点をSとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AS}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right|$ を求めよ．

(3) 四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とするとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|$ を求めよ．

神戸大学

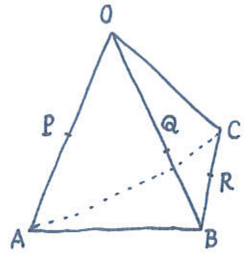
2016年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 四面体OABCにおいて，Pを辺OAの中点，Qを辺OBを2：1に内分する点，Rを辺BCの中点とする．P，Q，Rを通る平面と辺ACの交点をSとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $|\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SC}|$ を求めよ．

(3) 四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{QS}|$ を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ より，$\underline{\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$ //

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$ より，$\underline{\overrightarrow{PR}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$ //

(2) $|\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SC}|=s:1-s$ とおくと，$\overrightarrow{OS}=(1-s)\vec{a}+s\vec{c}$

$\therefore \overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{a}+s\vec{c}$

ここで，点Sは平面PQR上にあるので，

$\overrightarrow{PS}=k\overrightarrow{PQ}+l\overrightarrow{PR}$ と表せるので(1)より，

$\therefore \left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{a}+s\vec{c}=-\frac{1}{2}(k+l)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}k+\frac{1}{2}l\right)\vec{b}+\frac{1}{2}l\vec{c}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は互いに一次独立より，

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-s=-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}l\\ \frac{2}{3}k+\frac{1}{2}l=0\\ s=\frac{1}{2}l\end{cases}\iff k=-1,\ l=\frac{4}{3},\ s=\frac{2}{3}$$

$\therefore |\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SC}|=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\underline{2:1}$ //

(3) (2)より，$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$

$\therefore \overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

四面体OABCが1辺の長さが1の正四面体のとき，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ より，

$$|\overrightarrow{QS}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{4}{9}|\vec{c}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{8}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{4}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}$$

$$=\frac{5}{9}$$

$\therefore \underline{|\overrightarrow{QS}|=\frac{\sqrt{5}}{3}}$ //