______年　番号______　　氏名______________________________

$\boxed{1}$ a を正の実数とし，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-ax}\tan^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\right)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする．$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ が成り立つとき，a の値を求めよ．

(2) $f'(x) = 0$ かつ $-\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3}$ を満たす x がちょうど 3 個存在するように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(3) a の値が (2) で定めた範囲にあるとする．このとき，方程式 $f'(x) = 0$ の解を x_1，x_2，x_3 $\left(-\dfrac{\pi}{3} < x_1 < x_2 < x_3 < \dfrac{\pi}{3}\right)$ とし，

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad y_3 = f(x_3)$$

とおく．

（i）y_1，y_2，y_3 を大きさの順に並べよ．

（ii）$\tan x_3$ を a の式で表せ．

（東京農工大学　2016）

$\boxed{2}$ $a > 0$ とする．$x > 0$ で定義された関数 $y = x^2 + ax - 3a^2 \log x$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の範囲を求めよ．

（兵庫県立大学　2016）

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．なお，必要があれば以下の極限値の公式を用いてもよい．

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

(1) 方程式 $2^x = x^2$ $(x > 0)$ の実数解の個数を求めよ．

(2) a を正の実数とし，x についての方程式 $a^x = x^a$ $(x > 0)$ を考える．

(i) 方程式 $a^x = x^a$ $(x > 0)$ の実数解の個数を求めよ．

(ii) 方程式 $a^x = x^a$ $(x > 0)$ で a，x がともに正の整数となる a，x の組 $(a,\ x)$ をすべて求めよ．ただし $a \neq x$ とする．

（浜松医科大学　2016）

$\boxed{4}$ a を定数とし，関数 $f(x) = (x-a)e^{\frac{x^2}{2}}$ で表される曲線 $y = f(x)$ を C とする．ただし，e は自然対数の底とする．以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ が極値を持たないために a が満たすべき条件を求めよ．

(3) 曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

(4) (3) で求めた接線が原点を通るような t の値を考える．すべての実数の中で，そのような t の値が 3 つあるために a が満たすべき条件を求めよ．

（茨城大学　2016）

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=x^2(2x^2-x-2)e^x$ がある．次の問いに答えなさい．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．ただし，凹凸は調べなくてよい．
また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ であることは断りなしに用いてもよい．

(2) a を定数とする．2 つの曲線 $y=2x^4-x^3-2x^2$ と $y=ae^{-x}$ の共有点の数が 3 個であるための a の条件を求めなさい．

（前橋工科大学　2016）

$\boxed{6}$ 次の条件 $(*)$ を満たすような実数 a で最大のものを求めよ．

$(*)$ $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x\leqq 1-ax^2$ が成り立つ．

（信州大学　2015）

$\boxed{7}$ b を $b>2\sqrt{2}$ を満たす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x)=x+(e^x-b)e^x$ とするとき，方程式 $f(x)-a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつような実数 a の範囲を求めよ．

(2) 実数 a が (1) で求めた範囲にあるとする．このとき，点 $(a,\ b)$ を中心とする円で，曲線 $y=e^x$ と異なる 4 点で交わるものが存在することを示せ．

（香川大学　2015）

$\boxed{8}$ 次の問いに答えよ．

(1) xy 平面において，関数 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x>0)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$ を用いてよい．

(2) a を定数とする．xy 平面において，2 つの曲線 $y=ax^2$ と $y=\log x$ の共有点の個数を調べよ．

（愛知工業大学　2015）

2015年 医学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 次の条件 (*) を満たすような実数 a で最大のものを求めよ．

(*) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leqq 1 - ax^2$ が成り立つ．

$$\cos x \leqq 1 - ax^2 \iff \frac{1-\cos x}{x^2} \geqq a \quad (x \neq 0)$$

$x=0$ のときは成り立つ

よって，(*) $\iff$ $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のすべての x に対して，$\dfrac{1-\cos x}{x^2} \geqq a$

$f(x)$：偶関数より　　$= f(x)$ とおく

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot x^2 - (1-\cos x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$

$$g(x) = x\sin x + 2\cos x - 2$$

$$g'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x$$

$$= x\cos x - \sin x$$

$$g''(x) = -x\sin x$$

$\therefore$ $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$g''(x) < 0$　$\therefore$ $g'(x)$ は単調減少

$g'(0) = 0$ なので，$g'(x) < 0$　$\therefore$ $g(x)$ は単調減少

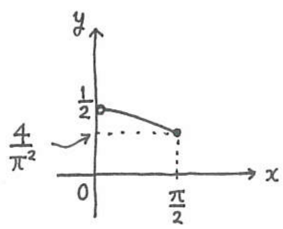
$g(0) = 0$ なので，$g(x) < 0$　すなわち，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(x) < 0$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to+0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	$\frac{4}{\pi^2}$



$\therefore$ 増減表より，グラフは右のようになる．

$\therefore$ $a \leqq \dfrac{4}{\pi^2}$　　$\therefore$ 最大のものは，$a = \dfrac{4}{\pi^2}$ //