$\boxed{1}$ $a > 0$ とする． $x > 0$ で定義された関数 $y = x^2 + ax - 3a^2 \log x$ のグラフ

が x 軸と共有点をもつような a の範囲を求めよ．

（兵庫県立大学　2016）

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ．なお，必要があれば以下の極限値の公式を用いてもよい．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

(1) 方程式 $2^x=x^2$ $(x>0)$ の実数解の個数を求めよ．

(2) a を正の実数とし，x についての方程式 $a^x=x^a$ $(x>0)$ を考える．

(i) 方程式 $a^x=x^a$ $(x>0)$ の実数解の個数を求めよ．

(ii) 方程式 $a^x=x^a$ $(x>0)$ で a，x がともに正の整数となる a，x の組 $(a,\ x)$ をすべて求めよ．ただし $a\neq x$ とする．

（浜松医科大学　2016）

$\boxed{3}$ a を定数とし，関数 $f(x)=(x-a)e^{\frac{x^2}{2}}$ で表される曲線 $y=f(x)$ を C とする．ただし，e は自然対数の底とする．以下の各問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ が極値を持たないために a が満たすべき条件を求めよ．

(3) 曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

(4) (3) で求めた接線が原点を通るような t の値を考える．すべての実数の中で，そのような t の値が 3 つあるために a が満たすべき条件を求めよ．

（茨城大学　2016）

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=x^2(2x^2-x-2)e^x$ がある．次の問いに答えなさい．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかきなさい．ただし，凹凸は調べなくてよい．また，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ であることは断りなしに用いてもよい．

(2) a を定数とする．2 つの曲線 $y=2x^4-x^3-2x^2$ と $y=ae^{-x}$ の共有点の数が 3 個であるための a の条件を求めなさい．

（前橋工科大学　2016）

$\boxed{5}$ 次の条件 (∗) を満たすような実数 a で最大のものを求めよ．

(∗) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leqq 1-ax^2$ が成り立つ．

（信州大学　2015）

$\boxed{6}$ b を $b > 2\sqrt{2}$ を満たす実数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x) = x + (e^x - b)e^x$ とするとき，方程式 $f(x) - a = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつような実数 a の範囲を求めよ．

(2) 実数 a が (1) で求めた範囲にあるとする．このとき，点 $(a,\ b)$ を中心とする円で，曲線 $y = e^x$ と異なる 4 点で交わるものが存在することを示せ．

（香川大学　2015）

$\boxed{7}$ 次の問いに答えよ．

(1) xy 平面において，関数 $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ $(x > 0)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$ を用いてよい．

(2) a を定数とする．xy 平面において，2 つの曲線 $y = ax^2$ と $y = \log x$ の共有点の個数を調べよ．

（愛知工業大学　2015）

2015年 医学部 第5問

数理 石井K

5 次の条件 (*) を満たすような実数 a で最大のものを求めよ．

(*) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leqq 1 - ax^2$ が成り立つ．

$\cos x \leqq 1 - ax^2 \iff \dfrac{1-\cos x}{x^2} \geqq a \quad (x \neq 0)$

$x=0$ のときは成り立つ

よって，(*) $\iff$ $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ のすべての x に対して，$\dfrac{1-\cos x}{x^2} \geqq a$

$f(x)$：偶関数より　　$= f(x)$ とおく

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot x^2 - (1-\cos x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$

$g(x) = x\sin x + 2\cos x - 2$

$g'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x$

$\quad = x\cos x - \sin x$

$g''(x) = -x\sin x$

$\therefore$ $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$g''(x) < 0$　$\therefore$ $g'(x)$ は単調減少

$g'(0) = 0$ なので，$g'(x) < 0$　$\therefore$ $g(x)$ は単調減少

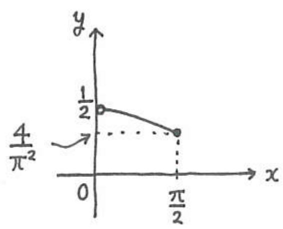
$g(0) = 0$ なので，$g(x) < 0$　すなわち，$0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$f'(x) < 0$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to+0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$(\frac{1}{2})$	↘	$\frac{4}{\pi^2}$



$\therefore$ 増減表より，グラフは右のようになる．

$\therefore$ $a \leqq \dfrac{4}{\pi^2}$　　$\therefore$ 最大のものは，$a = \dfrac{4}{\pi^2}$ //