横浜国立大学

2016年 経済 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=5,\quad {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2=\frac{2}{3}a_na_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．
(2) a_{n+2} を a_n，a_{n+1} を用いて表せ．
(3) 一般項 a_n を求めよ．

(1) ${a_1}^2=\frac{2}{3}a_1a_2$ より，$25=\frac{10}{3}a_2$ $\quad\therefore \underline{a_2=\frac{15}{2}}$

${a_1}^2+{a_2}^2=\frac{2}{3}a_2a_3$ より，$25+\frac{225}{4}=5a_3$ $\quad\therefore \underline{a_3=\frac{65}{4}}$

(2) ${a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2=\frac{2}{3}a_na_{n+1}$ $\cdots$①

${a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2+{a_{n+1}}^2=\frac{2}{3}a_{n+1}a_{n+2}$ $\cdots$②

②−① より，${a_{n+1}}^2=\frac{2}{3}a_{n+1}a_{n+2}-\frac{2}{3}a_na_{n+1}$

$\therefore a_{n+1}\left(a_{n+2}-a_n-\frac{3}{2}a_{n+1}\right)=0$ $\cdots$③

$a_1=5$ より，${a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2>0$ であるから，$a_na_{n+1}>0$ $\quad\therefore a_{n+1}\neq 0$

$\therefore$ ③より，$\underline{a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}+a_n\quad(n=1,2,3,\cdots)}$

(3) (2)より，$a_{n+2}-2a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-2a_n)$

$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=-\frac{5}{2}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$\therefore a_{n+1}-2a_n=-\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\cdots$④

再び(2)より，$a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=2\left(a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\right)$

$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\}$ は初項 $a_2+\frac{1}{2}a_1=10$，公比 2 の等比数列

$\therefore a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=10\cdot 2^{n-1}$ $\cdots$⑤

⑤−④ より，$\frac{5}{2}a_n=10\cdot 2^{n-1}+\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \underline{a_n=2^{n+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots)}$