横浜国立大学

2015年 経済 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

3 点Oを中心とする半径1の円に内接する三角形ABCがあり，

$$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

をみたしている．この円上に点Pがあり，線分ABと線分CPは直交している．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ と $|\overrightarrow{AB}|$ をそれぞれ求めよ．

(2) 線分ABと線分CPの交点をHとするとき，AH : HB を求めよ．

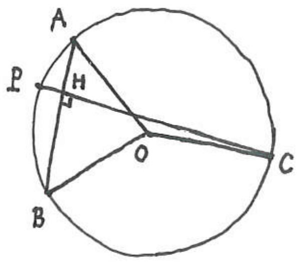
(3) 四角形APBCの面積を求めよ．

(1) $4\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$ の両辺を2乗して．

$16|\overrightarrow{OC}|^2=4|\overrightarrow{OA}|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9|\overrightarrow{OB}|^2$

ここで，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ より．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{4}$ //

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2&=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2\\&=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$



$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ //

(2) AH : HB $=k:1-k\ (0<k<1)$ とおくと．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}&=(1-k)\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{CB}\\&=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{CH}&=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}-\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)\\&=\left(\frac{3}{2}-k\right)\overrightarrow{OA}+\left(k+\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$\because \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より．$\overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{CH}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})&=\left(\frac{3}{2}-k\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left(k+\frac{3}{4}\right)|\overrightarrow{OB}|^2-\left(\frac{3}{2}-k\right)|\overrightarrow{OA}|^2-\left(k+\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=\left(\frac{3}{4}-2k\right)\cdot\frac{1}{4}+2k-\frac{3}{4}\\&=\frac{3}{2}k-\frac{9}{16}\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{3}{2}k-\dfrac{9}{16}=0 \quad \therefore k=\dfrac{3}{8}$　　$\therefore$ AH : HB $=\dfrac{3}{8}:\dfrac{5}{8}=3:5$ //

2枚目につづく

横浜国立大学

2015年 経済 第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

3 点Oを中心とする半径1の円に内接する三角形ABCがあり，

$$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

をみたしている．この円上に点Pがあり，線分ABと線分CPは直交している．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ と $|\overrightarrow{AB}|$ をそれぞれ求めよ．

(2) 線分ABと線分CPの交点をHとするとき，AH : HBを求めよ．

(3) 四角形APBCの面積を求めよ．

(3) (2)より．$\overrightarrow{CH}=\frac{9}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{9}{8}\overrightarrow{OB}$ となるので．

(別) $\overrightarrow{CP}=l\overrightarrow{CH}$ とおいても答えは出るが少し書く量が増える．

C, H, P が一直線上にあることから．

$\overrightarrow{CP}=m\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$ と表せる．

$\therefore \overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$=(m-\frac{1}{2})\overrightarrow{OA}+(m-\frac{3}{4})\overrightarrow{OB}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=(m-\frac{1}{2})^2+(m-\frac{3}{4})^2+2(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{4})\cdot\frac{1}{4}$

$=\frac{5}{2}m^2-\frac{25}{8}m+1$

$|\overrightarrow{OP}|=1$ より．$\frac{5}{2}m^2-\frac{25}{8}m=0$

$\therefore \frac{5}{2}m(m-\frac{5}{4})=0$

$C\neq P$ より $m\neq 0$　$\therefore m=\frac{5}{4}$

このとき．$|\overrightarrow{CP}|^2=\frac{25}{16}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$

$=\frac{125}{32}$

$\therefore |\overrightarrow{CP}|=\frac{5\sqrt{10}}{8}$

$\therefore$ 求める面積は．$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CP}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{10}}{8}=\underline{\frac{5\sqrt{15}}{16}}$