

2010年第5問

5 各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ が, $a_1 = 1$ と関係式

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{a_n + a_{n+1}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたしている. 次の問いに答えよ.

- (1) $a_n \geq \sqrt{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.
- (2) $\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3} (n^{\frac{3}{2}} - 1)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を示せ.
- (3) $a_n \leq \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{6}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.