



2015年理系第2問

2 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ.(2) 不定積分 $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ を求めよ.(3) n を 3 以上の整数とすると、不等式

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ.

(1) $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$ とおくと.

$$f'(x) = (\log x)^2 + x \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \log x \cdot (\log x + 2)$$

よって、 $f'(x) > 0$ ($x > 1$) $\therefore f(x)$ は $x > 1$ において単調増加かつ $f(x) > 0$ $\therefore \frac{1}{x(\log x)^2} = \frac{1}{f(x)}$ は $x > 1$ において単調減少

$$(2) \left(\frac{1}{\log x} \right)' = -\frac{1}{x(\log x)^2} \text{ より}$$

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

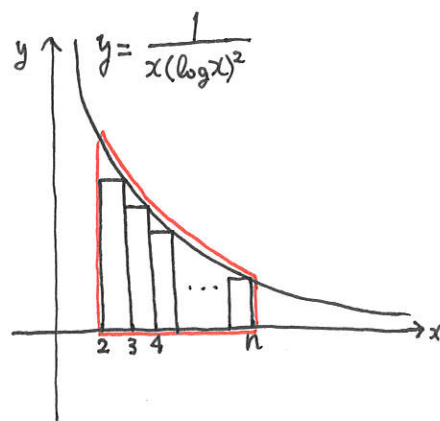
(3) 右の図より.

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^2} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^n$$

$$= \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log n}$$

$$< \frac{1}{\log 2} \quad \square$$



$n \geq 3$ より、 $\log n > 0$

$$\therefore \frac{1}{\log n} > 0$$