2014年 海洋工 第5問

$\boxed{5}$ $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_k=\displaystyle\int_0^{\log 2}(e^x-1)^k\,dx$ とおく．

(1) $0 \leqq x \leqq \log 2$ のとき，$0 \leqq e^x-1 \leqq \dfrac{x}{\log 2}$ が成り立つことを示せ．ただし，$e>2$ であることを用いてよい．

(2) I_k+I_{k+1} を k を用いて表せ．

(3) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}=I_0+(-1)^nI_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}$ を求めよ．